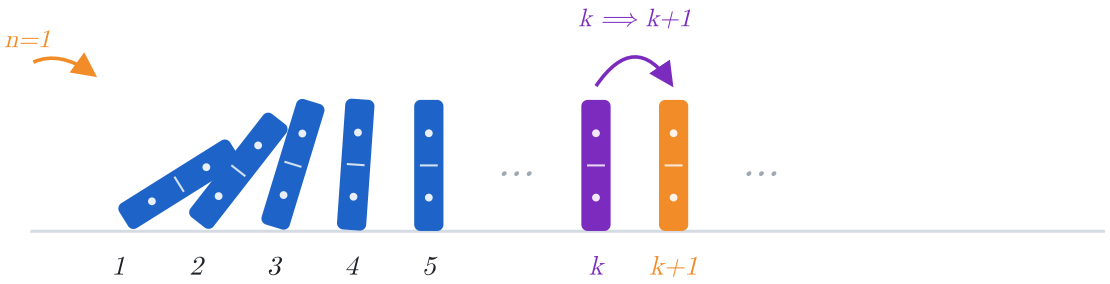
אינדוקציה מתמטית

סיכום, דוגמאות פתורות ותרגילים



ערן • מתמטיקה

תוכן העניינים

1	מהי אינדוקציה מתמטית?	הרעיון, ארבעת השלבים, דוגמה ראשונה	3
2	סכומים של סדרה חשבונית	תרגילים 1 עד 5	7
3	כשבשלב הבדיקה מתקבל יותר מאיבר אחד	תרגילים 1 עד 3	9
4	סכומים של מכפלות וחישובי סכומים	תרגילים 1 עד 8 ופתרונות	11
5	סכומים של שברים	תרגילים 1 עד 8 ופתרונות	16
6	אינדוקציה עם חזקות	תרגילים 1 עד 15	20
7	הוכחה עבור n זוגי ועבור n אי־זוגי	תרגילים 1 עד 6	24
8	סדרות עם סימנים מתחלפים	תרגילים 1 עד 11	27
9	אינדוקציה עם עצרת	תרגילים 1 עד 7	31
10	אינדוקציה עם זהויות טריגונומטריות	תרגילים 1 עד 5	34
11	כשנתונה רק הנוסחה לאיבר הכללי	תרגילים 1 עד 6	37
12	מכלל נסיגה לנוסחה לפי מקום	תרגילים 1 עד 6	39
13	כשלים באינדוקציה	תרגילים 1 עד 7 ופתרונות	42
14	חישובים, מציאת n ופרמטרים	תרגילים 1 עד 12 ופתרונות	46
15	שאלות לחזרה	תרגילים 1 עד 9 ופתרונות	51
16	דף סיכום	כל סוגי התרגילים בטבלה אחת	54

מהי אינדוקציה מתמטית?

בהרבה שאלות בבגרות מופיעה **טענה שצריכה להתקיים לכל** n **טבעי**. למשל:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

אפשר לבדוק אותה עבור כמה ערכים של n:

- עבור $n=1$: באגף שמאל 1, ובאגף ימין $\frac{1\cdot 2}{2}=1$. ✓
- עבור $n=2$: באגף שמאל $1+2=3$, ובאגף ימין $\frac{2\cdot 3}{2}=3$. ✓
- עבור $n=3$: באגף שמאל $1+2+3=6$, ובאגף ימין $\frac{3\cdot 4}{2}=6$. ✓

אבל יש **אינסוף** מספרים טבעיים, ואי אפשר לבדוק את כולם אחד אחד.

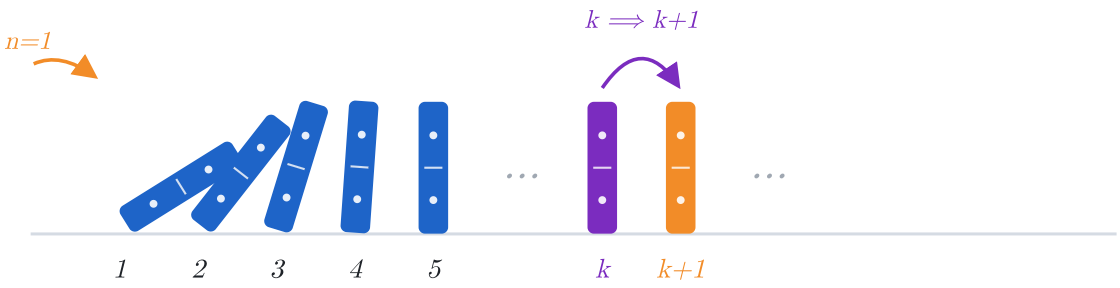
בדיקה של הרבה מקרים היא לא הוכחה. הביטוי n^2+n+41 נותן מספר ראשוני עבור $n=1,2,3,\ldots,39$, כלומר 39 בדיקות מוצלחות ברצף. אבל עבור $n=40$ מקבלים $40^2+40+41=41\cdot 41=1681$, וזה כבר לא מספר ראשוני.

לכן צריך שיטה שמוכיחה את הטענה **לכל** n בבת אחת. השיטה הזאת נקראת **אינדוקציה מתמטית**.

1.1 רעיון הדומינו

דמיינו שורה ארוכה, אינסופית, של אבני דומינו. כדי להיות בטוחים ש**כל** האבנים ייפלו, מספיק לדעת שני דברים:

1. **האבן הראשונה נופלת.**
2. **כל אבן שנופלת מפילה את האבן שאחריה.** כלומר, אם האבן ה־k נפלה, אז גם האבן ה־$(k+1)$ תיפול.



איור 1.1: מפילים את האבן הראשונה ($n=1$), וכל אבן מפילה את זו שאחריה ($k\Rightarrow k+1$). לכן כל האבנים נופלות.

שני הדברים יחד מבטיחים שכל האבנים נופלות: הראשונה נופלת, היא מפילה את השנייה, השנייה מפילה את השלישית, וכך הלאה, בלי סוף.

עקרון האינדוקציה. אם טענה נכונה עבור $n = 1$, ואם מהנחה שהיא נכונה עבור $n = k$ אפשר להוכיח שהיא נכונה גם עבור $n = k + 1$, אז הטענה נכונה **לכל** n **טבעי**.

1.2 האיבר הכללי והאיבר האחרון

נסתכל על הסכום $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$. הביטוי $2n$ שמופיע בסוף נקרא **האיבר הכללי**: כשמציבים בו 1 מקבלים את האיבר הראשון, כשמציבים 2 מקבלים את השני, וכן הלאה.

עבור n מסוים, האיבר הכללי הוא **האיבר האחרון** בסכום. הסימן $\cdots$ מסתיר את כל האיברים שבאמצע:

n	האיבר האחרון ($2n$)	הסכום באגף שמאל
1	2	2
2	4	$2 + 4$
3	6	$2 + 4 + 6$
k	$2k$	$2 + 4 + \cdots + 2k$
$k + 1$	$2(k + 1)$	$2 + 4 + \cdots + 2k + 2(k + 1)$

האיבר שלפני האחרון. כשמציבים $n = k + 1$, האיבר האחרון הוא $2(k + 1)$. האיבר **שלפניו** הוא $2k$, כלומר **האיבר האחרון של הסכום עם** $n = k$. זה הסוד של כל ההוכחות בספר: בתוך הסכום של $k + 1$ "מתחבא" הסכום של k.

1.3 ארבעת השלבים של הוכחה באינדוקציה

שלב הבדיקה. מציבים $n = 1$ בשני האגפים ומראים שהם שווים. באגף שמאל מציבים 1 **באיבר האחרון**, ולוקחים את כל האיברים עד אליו.

שלב ההנחה. בכל מקום שבו כתוב n רושמים k. את השוויון הזה **מניחים** שהוא נכון.

שלב ההוכחה (צריך להוכיח). בכל מקום שבו כתוב n רושמים $k + 1$. כדאי לפתוח סוגריים ולסדר את אגף ימין, כדי שנראה בבירור לאן אנחנו חותרים.

ההוכחה. מתחילים מאגף שמאל של שלב ההוכחה, **חושפים** בו את הסכום משלב ההנחה (רושמים את האיבר שלפני האחרון), **מחליפים** אותו לפי ההנחה, ומסדרים עד שמגיעים בדיוק לאגף ימין.

משפט מסכם. הטענה נכונה עבור $n = 1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n = k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n = k + 1$. לכן, לפי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

לאורך הספר, בדוגמאות הפתורות, נסמן בצבע את מה שחשוב, כמו בסרטונים:

הסכום משלב ההנחה והביטוי שמחליף אותו | האיבר החדש / גורם משותף | מה שצריך להוכיח | הגענו למטרה

1.4 דוגמה ראשונה

דוגמה 1.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

שלב הבדיקה

נציב $n=1$. האיבר האחרון באגף שמאל הוא 1, והוא גם האיבר הראשון, ולכן כל אגף שמאל הוא פשוט 1.

באגף ימין: $\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}=1$. שני האגפים שווים, ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב ההנחה $(n=k)$

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

שלב ההוכחה $(n=k+1)$

צריך להוכיח:

$$1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ההוכחה

ניקח את אגף שמאל. נזיז את האיבר האחרון, $(k+1)$, מעט ימינה, ובמקום שהתפנה נרשום את האיבר שלפניו, k. כך נחשף הסכום משלב ההנחה:

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+(k+1) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\ &=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\ &=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

בשורה השלישית עשינו מכנה משותף, וברביעית הוצאנו את $(k+1)$ כגורם משותף. קיבלנו בדיוק את מה שהיה צריך להוכיח.

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

לסיכום: הוכחה באינדוקציה

- **בדיקה:** מציבים $n = 1$ (באגף שמאל: באיבר האחרון) ומראים שהאגפים שווים.
- **הנחה:** רושמים את הטענה עם k במקום n.
- **צריך להוכיח:** רושמים את הטענה עם $k + 1$ במקום n, ומסדרים את אגף ימין.
- **הוכחה:** באגף שמאל של $k + 1$ רושמים את **האיבר שלפני האחרון**, וכך נחשף הסכום משלב ההנחה. מחליפים אותו לפי ההנחה, ומסדרים עד שמגיעים לאגף ימין.
- **משפט מסכם** בסוף.

פרק 2

סכומים של סדרה חשבונית

הסוג הראשון והבסיסי ביותר: באגף שמאל יש סכום של סדרה חשבונית (בכל פעם מוסיפים את אותו מספר), והאיבר הכללי הוא ביטוי כמו $4n+1$ או $6n+3$.

2.1 דוגמה פתורה

דוגמה 2.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$5+9+13+\cdots+(4n+1)=n(2n+3)$$

שלב הבדיקה

עבור $n=1$ האיבר האחרון הוא $4\cdot 1+1=5$, וזה גם האיבר הראשון. לכן אגף שמאל הוא 5. באגף ימין: $1\cdot(2\cdot 1+3)=5$. שני האגפים שווים. ✓

שלב ההנחה ($n=k$)

$$5+9+13+\cdots+(4k+1)=k(2k+3)$$

שלב ההוכחה ($n=k+1$)

$$5+9+13+\cdots+(4(k+1)+1)=(k+1)(2(k+1)+3)$$

נפתח סוגריים ונסדר. האיבר האחרון הוא $4k+5$, ואגף ימין הוא $(k+1)(2k+5)$. צריך להוכיח:

$$5+9+13+\cdots+(4k+5)=(k+1)(2k+5)$$

ההוכחה

האיבר שלפני $(4k+5)$ הוא $(4k+1)$, האיבר האחרון משלב ההנחה:

$$\begin{aligned}5+9+\cdots+(4k+5) &= 5+9+\cdots+(4k+1)+(4k+5)\\ &= k(2k+3)+(4k+5)\\ &= 2k^2+3k+4k+5\\ &= 2k^2+7k+5\end{aligned}$$

נפתח סוגריים גם במה שצריך להוכיח: $(k+1)(2k+5)=2k^2+5k+2k+5=2k^2+7k+5$.
קיבלנו את אותו ביטוי, ולכן השוויון נכון. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

שתי דרכים להגיע למטרה. כשאגף ימין הוא מכפלה, כמו $(k+1)(2k+5)$, אפשר (1) לפתוח סוגריים **בשני** הצדדים ולראות שמתקבל אותו ביטוי, כמו בדוגמה, או (2) לפרק את מה שקיבלנו לגורמים עד שמגיעים למכפלה. שתי הדרכים נכונות.

לסיכום: סדרה חשבונית

- האיבר האחרון הוא ביטוי ממעלה ראשונה, כמו $an+b$. בשלב ההוכחה מציבים $k+1$ ופותחים סוגריים: $4(k+1)+1=4k+5$.
- האיבר שלפני האחרון הוא תמיד האיבר האחרון משלב ההנחה.
- אחרי ההחלפה לפי ההנחה מקבלים ביטוי ריבועי. פותחים סוגריים גם במטרה ומשווים.

תרגילים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

1. $9+15+21+\cdots+(6n+3)=3n(n+2)$

2. $4+8+12+\cdots+4n=2n(n+1)$

3. $4+7+10+\cdots+(3n+1)=\dfrac{n(3n+5)}{2}$

4. $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

5. $2+7+12+\cdots+(5n-3)=\dfrac{n(5n-1)}{2}$

כשבשלב הבדיקה מתקבל יותר מאיבר אחד

עד עכשיו, כשהצבנו $n=1$ באיבר האחרון, קיבלנו את **האיבר הראשון**, ולכן אגף שמאל היה מספר אחד. אבל זה לא תמיד כך.

נסתכל על הסכום $3+6+9+\cdots+3(n+2)$. כשמציבים $n=1$ באיבר האחרון מקבלים $3\cdot(1+2)=9$. כלומר עבור $n=1$ הסכום **מגיע עד 9**, ולכן אגף שמאל הוא:

$$3+6+9=18$$

טעות נפוצה: לרשום באגף שמאל רק 9 (האיבר האחרון), או רק 3 (האיבר הראשון). אגף שמאל הוא **כל** הסכום, מהאיבר הראשון ועד האיבר האחרון.

כמה איברים יש בסכום? משווים את האיבר הכללי לאיבר האחרון. ב־$3+6+9+\cdots+3(n+2)$ האיברים הם $3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ldots$ ולכן האחרון, $3(n+2)$, הוא האיבר ה־$(n+2)$. עבור $n=1$ יש 3 איברים.

3.1 דוגמה פתורה

דוגמה 3.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2+4+6+\cdots+2(n+1)=(n+1)(n+2)$$

שלב הבדיקה

עבור $n=1$ האיבר האחרון הוא $2\cdot(1+1)=4$. לכן אגף שמאל הוא $2+4=6$, **שני איברים**. באגף ימין: $(1+1)(1+2)=6$. שני האגפים שווים. ✓

שלב ההנחה ($n=k$)

$$2+4+6+\cdots+2(k+1)=(k+1)(k+2)$$

שלב ההוכחה ($n=k+1$)

$$2+4+6+\cdots+2(k+2)=(k+2)(k+3)$$

ההוכחה

האיבר שלפני $2(k+2)$ הוא $2(k+1)$, האיבר האחרון משלב ההנחה:

$$\begin{aligned}2+4+\cdots+2(k+2) &= 2+4+\cdots+2(k+1)+2(k+2)\\ &= (k+1)(k+2)+2(k+2)\\ &= (k+1)(k+2)+2(k+2)\\ &= (k+2)(k+1+2)\\ &= (k+2)(k+3)\end{aligned}$$

הפעם לא פתחנו סוגריים: ראינו ש־$(k+2)$ מופיע בשני המחוברים, והוצאנו אותו כגורם משותף. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

טיפ: הסתכלו על המטרה לפני שפותחים סוגריים. אם במה שצריך להוכיח מופיע גורם, למשל $(k+2)$, ואותו גורם מופיע גם בביטוי שקיבלנו, כדאי להוציא אותו כגורם משותף. זה חוסך הרבה חישובים.

לסיכום: יותר מאיבר אחד בבדיקה

- בשלב הבדיקה מציבים $n=1$ **באיבר האחרון**, ורושמים את **כל** האיברים מההתחלה ועד אליו.
- שאר ההוכחה זהה: האיבר שלפני האחרון (בשלב ההוכחה) הוא האיבר האחרון משלב ההנחה.
- כשיש גורם משותף בין מה שקיבלנו לבין המטרה, מוציאים אותו.

תרגילים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

1. $3+6+9+\cdots+3(n+2)=\dfrac{3(n+2)(n+3)}{2}$

2. $5+10+15+\cdots+5(n+1)=\dfrac{5(n+1)(n+2)}{2}$

3. $1+4+7+\cdots+(3n+7)=\dfrac{(n+3)(3n+8)}{2}$

פרק 4

סכומים של מכפלות וחישובי סכומים

בפרק הזה כל איבר בסכום הוא **מכפלה**, למשל $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots$. אחרי שמוכיחים את השוויון, אפשר **להשתמש בו** כדי לחשב סכומים ארוכים מאוד בלי לחבר אותם אחד אחד.

4.1 דוגמה פתורה: ההוכחה

דוגמה 4.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

שלב הבדיקה

עבור $n=1$: אגף שמאל הוא $1\cdot 2=2$, ואגף ימין $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}=2$. ✓

שלב ההנחה ($n=k$)

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

שלב ההוכחה ($n=k+1$)

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

ההוכחה

$$\begin{aligned}1\cdot 2+\cdots+(k+1)(k+2) &= 1\cdot 2+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)\\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)\\ &= (k+1)(k+2)\cdot\frac{k+3}{3}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\end{aligned}$$

הגורם המשותף כאן הוא **מכפלה**: $(k+1)(k+2)$ מופיע גם בהנחה וגם באיבר החדש. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n = 1$, וממהנחה שהיא נכונה עבור $n = k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n = k + 1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

4.2 חישוב סכום בעזרת השוויון

עכשיו, כשהשוויון מוכח, נשתמש בו.

דוגמה 4.2 • חשבו את הסכום $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 15 \cdot 16$

שלב 1: לאיזה n מתאים האיבר האחרון? האיבר הכללי הוא $n(n+1)$, והאיבר האחרון הוא $15 \cdot 16$. לכן $n = 15$.

שלב 2: מציבים באגף ימין.

$$1 \cdot 2 + \cdots + 15 \cdot 16 = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{3} = 1360$$

דוגמה 4.3 • חשבו את הסכום $6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + \cdots + 15 \cdot 16$

הסכום **לא מתחיל מהאיבר הראשון**. הרעיון: ניקח את הסכום המלא עד $15 \cdot 16$ ($n = 15$), ונחסיר ממנו את כל האיברים **שלפני** $6 \cdot 7$, כלומר את הסכום עד $5 \cdot 6$ ($n = 5$):

$$\begin{aligned} 6 \cdot 7 + \cdots + 15 \cdot 16 &= (1 \cdot 2 + \cdots + 15 \cdot 16) - (1 \cdot 2 + \cdots + 5 \cdot 6) \\ &= \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{3} - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3} \\ &= 1360 - 70 = 1290 \end{aligned}$$

שימו לב: מחסירים את הסכום עד האיבר **שלפני** האיבר הראשון של הסכום המבוקש ($5 \cdot 6$, כלומר $n = 5$), ולא עד האיבר הראשון עצמו. אם נחסיר עד $n = 6$, נמחק גם את $6 \cdot 7$, שהוא חלק מהסכום שלנו.

4.3 למה שלב הבדיקה חשוב?

אפשר לחשוב ששלב הבדיקה הוא "סתם פורמליות", כי העבודה האמיתית היא בשלב ההוכחה. הנה טענה **שקרית** שמראה למה זה לא נכון:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 1$$

המעבר מ־k ל־$k+1$ מצליח: אם $2 + 4 + \cdots + 2k = k^2 + k + 1$, אז

$$2+4+\cdots+2k+2(k+1)=k^2+k+1+2k+2=(k+1)^2+(k+1)+1$$

אבל הבדיקה נכשלת: עבור $n=1$ אגף שמאל הוא 2 ואגף ימין 3. האבן הראשונה לא נופלת, ולכן שום אבן לא נופלת. (למעשה הטענה לא נכונה לאף n.)

מסקנה. הוכחה באינדוקציה צריכה **את שני** החלקים: הבדיקה ($n=1$) והמעבר ($k \Rightarrow k+1$). אם אחד מהם חסר, אי אפשר להסיק שהטענה נכונה לכל n טבעי.

לסיכום: מכפלות וחישובי סכומים

- **בהוכחה:** חפשו גורם משותף (לרוב מכפלה כמו $(k+1)(k+2)$) בין ההנחה לבין האיבר החדש.
- **לחישוב סכום:** משווים את האיבר הכללי לאיבר האחרון, מוצאים את n ומציבים באגף ימין.
- **סכום מהאמצע:** הסכום עד האיבר האחרון, פחות הסכום עד האיבר שלפני הראשון.
- **בלי שלב הבדיקה אין הוכחה.**

תרגילים

1. פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots+n(n+3)=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots+20\cdot 23$

2. פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$2\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 7+\cdots+(n+1)(n+4)=\frac{n(n+4)(n+5)}{3}$$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $2\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 7+\cdots+16\cdot 19$

3. פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7+\cdots+(n+1)(n+5)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+15)}{6}$$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7+\cdots+18\cdot 22$

4. נתונה הטענה: $2\cdot 12+3\cdot 14+4\cdot 16+\cdots+(n+3)(2n+14)=\frac{(n+2)(n+9)(2n+11)}{3}$

נתון כי הוכח שאם הטענה נכונה עבור $n=k$, אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$.

א. האם מכאן ניתן להסיק שהטענה נכונה לכל n טבעי? הסבירו. מה חסר כדי להשלים את ההוכחה באינדוקציה? השלימו את ההוכחה.

ב. חשבו את הסכום: $2\cdot 12+3\cdot 14+4\cdot 16+\cdots+8\cdot 24$

ג. חשבו את הסכום: $2\cdot 12+3\cdot 14+4\cdot 16+\cdots+19\cdot 46$

ד. חשבו את הסכום: $9\cdot 26+10\cdot 28+11\cdot 30+\cdots+19\cdot 46$

5. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot 9+\cdots+n(2n+1)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

ב. חשבו את הסכום: $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+6\cdot 13$

ג. חשבו את הסכום: $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+20\cdot 41$

ד. חשבו את הסכום: $7\cdot 15+8\cdot 17+9\cdot 19+\cdots+20\cdot 41$

6. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{1\cdot 6}{2}+\frac{2\cdot 7}{2}+\frac{3\cdot 8}{2}+\cdots+\frac{n(n+5)}{2}=\frac{n(n+1)(n+8)}{6}$$

ב. חשבו את הסכום: $\frac{1\cdot 6}{2}+\frac{2\cdot 7}{2}+\frac{3\cdot 8}{2}+\cdots+\frac{18\cdot 23}{2}$

ג. חשבו את הסכום: $\frac{1\cdot 6}{2}+\frac{2\cdot 7}{2}+\frac{3\cdot 8}{2}+\cdots+\frac{31\cdot 36}{2}$

ד. חשבו את הסכום: $\frac{19\cdot 24}{2}+\frac{20\cdot 25}{2}+\frac{21\cdot 26}{2}+\cdots+\frac{31\cdot 36}{2}$

7. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$3^2+6^2+9^2+\cdots+(3n)^2=\frac{3n(n+1)(2n+1)}{2}$$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $21^2+24^2+27^2+\cdots+60^2$

8. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $12^2+13^2+14^2+\cdots+25^2$

תשובות

תרגיל	א	ב	ג	ד
1		3500		
2		1900		
3		2793		
4	לא, חסר שלב הבדיקה	686	6450	5764
5		203	5950	5747
6		1482	6448	4966
7		25011		
8		5019		

פרק 5

סכומים של שברים

כאן כל איבר בסכום הוא **שבר**, ובדרך כלל המכנה הוא מכפלה של שני גורמים, כמו $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. העבודה העיקרית בהוכחה היא **מכנה משותף** ו**צמצום**.

5.1 דוגמה פתורה

דוגמה 5.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

שלב הבדיקה

עבור $n=1$: אגף שמאל הוא $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$, ואגף ימין $\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$. ✓

שלב ההנחה ($n=k$)

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

שלב ההוכחה ($n=k+1$)

כשמציבים $k+1$: $2(k+1)-1=2k+1$ ו־$2(k+1)+1=2k+3$. צריך להוכיח:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

ההוכחה

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{1}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{k+1}{2k+3}
\end{aligned}$$

כדי לפרק את $2k^2+3k+1$ אפשר לפתור את המשוואה $2k^2+3k+1=0$ (הפתרונות: $k=-1$ ו־$k=-\frac{1}{2}$), או פשוט לנחש: **המטרה מכילה** $(k+1)$, ולכן $(k+1)$ חייב להיות אחד הגורמים. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

המטרה עוזרת לפרק. כשמגיעים למונה ריבועי שצריך לפרק, הסתכלו על מה שצריך להוכיח: הגורם שמופיע במונה של המטרה **חייב** להיות אחד הגורמים. והגורם שמופיע במכנה ואינו במטרה **חייב** להצטמצם.

5.2 חישוב סכום של שברים

דוגמה 5.2 • חשבו את הסכום $\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 21}$

נמצא לאילו ערכים של n מתאימים האיבר הראשון והאחרון. $2n-1=7$ נותן $n=4$, ו־$2n-1=19$ נותן $n=10$. לכן נחסיר מהסכום עד $n=10$ את הסכום עד $n=3$:

$$\frac{10}{21}-\frac{3}{7}=\frac{10}{21}-\frac{9}{21}=\frac{1}{21}$$

כשהשברים רשומים כמספרים. לפעמים הסכום נתון כ־$\cdots+\frac{1}{80}+\frac{1}{63}$ ולא כמכפלות. מפרקים כל מכנה לפי המבנה של האיבר הכללי: $63=7\cdot 9$, $80=8\cdot 10$, ומשם מוצאים את n.

5.3 כשאגף ימין הוא הפרש

בחלק מהתרגילים אגף ימין נראה כך: $\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$, כלומר **מספר קבוע פחות ביטוי**. כמו בסרטון של הסימנים המתחלפים, את המספר הקבוע **מניחים בצד** ולא נוגעים בו. צריך רק להראות שהביטוי ש"משתנה" מסתדר:

$$-\frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}+\frac{2}{(k+2)(k+4)}=-\frac{2k+7}{(k+3)(k+4)}$$

(בכחול: החלק המשתנה מההנחה, בכתום: האיבר החדש, בצהוב: המטרה.) המכנה המשותף הוא $(k+2)(k+3)(k+4)$, ואחרי צמצום של $(k+2)$ מגיעים למטרה.

לסיכום: סכומים של שברים

- בשלב ההוכחה: מכנה משותף בין ההנחה לבין האיבר החדש.
- מפרקים את המונה לגורמים. **המטרה אומרת לכם מה צריך לצאת**, וגורם שצריך להיעלם מצטמצם.
- כשבאגף ימין יש מספר קבוע, מניחים אותו בצד ועובדים רק על הביטוי שמשתנה.
- בחישוב סכום: מוצאים את n של האיבר הראשון והאחרון (לפעמים צריך לפרק את המכנה), ומחסירים.

תרגילים

1. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{20\cdot 21}$

2. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{4}{4\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 6}+\frac{4}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{4}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{n+4}$$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{15\cdot 16}$

3. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{2(3n+2)}$$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{29\cdot 32}$

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{4\cdot 6}+\cdots+\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$$

5. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{4\cdot 6}+\frac{2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{2}{(n+2)(n+4)}=\frac{7}{12}-\frac{2n+7}{(n+3)(n+4)}$$

6. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הראו כי מתקיים: $(k+1)(k+2)(4k+1)=4k^3+13k^2+11k+2$

ב. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{2}{1\cdot 5}+\frac{12}{5\cdot 9}+\frac{30}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{4n^2-2n}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n(n+1)}{4n+1}$$

(נסו לפתור פעמיים: פעם אחת בעזרת סעיף א', ופעם נוספת בלעדיו.)

ג. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $\frac{30}{117}+\frac{56}{221}+\frac{90}{357}+\cdots+\frac{306}{1221}$

7. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\cdots+\frac{1}{195}$

8. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\frac{9}{400}+\cdots+\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2}$$

ב. היעזרו בשוויון שהוכחתם כדי לחשב את הסכום: $\frac{11}{900}+\frac{13}{1764}+\frac{15}{3136}+\cdots+\frac{23}{17424}$

תשובות

תרגיל	א	ב	ג	ד
1		$\frac{16}{105}$		
2		$\frac{3}{16}$		
3		$\frac{9}{160}$		
6			$\frac{196}{111}$	
7		$\frac{109}{1680}$		
8		$\frac{119}{3600}$		

פרק 6

אינדוקציה עם חזקות

בפרק הזה האיבר הכללי מכיל **חזקה** שהמעריך שלה תלוי ב־n, כמו 2^{n-1} או $n \cdot 3^n$. ההוכחות כאן נשענות על חוקי החזקות.

חוקי החזקות שנשתמש בהם

$$\frac{1}{a^k} = \frac{a}{a^{k+1}} \qquad a^{k-1} = \frac{a^k}{a} \qquad a^{k+1} = a \cdot a^k \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

6.1 דוגמה פתורה: סכום של חזקות

דוגמה 6.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

שלב הבדיקה

עבור $n = 1$ האיבר האחרון הוא $2^0 = 1$. אגף שמאל: 1. אגף ימין: $2^1 - 1 = 1$. ✓

שלב ההנחה ($n = k$)

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

שלב ההוכחה ($n = k + 1$)

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

ההוכחה

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + 2^k &= 1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k \\ &= 2^k - 1 + 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

$2^k + 2^k$ הם "שתי פעמים 2^k", כלומר $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n = 1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n = k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n = k + 1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

6.2 דוגמה פתורה: מספר כפול חזקה

דוגמה 6.2 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$$

שלב הבדיקה

עבור $n=1$: אגף שמאל $1\cdot 2=2$, אגף ימין $(1-1)\cdot 2^2+2=2$. ✓

שלב ההנחה ($n=k$)

$$1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+k\cdot 2^k=(k-1)\cdot 2^{k+1}+2$$

שלב ההוכחה ($n=k+1$)

$$1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+(k+1)\cdot 2^{k+1}=k\cdot 2^{k+2}+2$$

ההוכחה

שימו לב ל־$+2$ במטרה: אותו $+2$ מופיע גם בהנחה. **נניח אותו בצד**, ונוציא גורם משותף 2^{k+1}:

$$\begin{aligned}1\cdot 2+\cdots+(k+1)\cdot 2^{k+1}&=1\cdot 2+\cdots+k\cdot 2^k+(k+1)\cdot 2^{k+1}\\&=(k-1)\cdot 2^{k+1}+2+(k+1)\cdot 2^{k+1}\\&=2^{k+1}[(k-1)+(k+1)]+2\\&=2^{k+1}\cdot 2k+2\\&=k\cdot 2^{k+2}+2\end{aligned}$$

בשורה האחרונה: $2^{k+1}\cdot 2=2^{k+2}$. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

איזו חזקה להוציא? הסתכלו על החזקות שיש לכם אחרי ההחלפה, והוציאו את **הקטנה** מביניהן. למשל מ־3^k ו־3^{k+1} מוציאים 3^k, כי $3^{k+1}=3\cdot 3^k$. בשברים עושים ההפך: המכנה המשותף של $\frac{1}{3^k}$ ו־$\frac{1}{3^{k+1}}$ הוא **הגדולה**, 3^{k+1}.

לסיכום: אינדוקציה עם חזקות

- בשלב ההוכחה מציבים $k+1$ במעריך: $2^{n-1} \to 2^k$, $3^{n+1} \to 3^{k+2}$.
- מחברים חזקות זהות: $2^k + 2^k = 2^{k+1}$, $3^k + 3^k + 3^k = 3^{k+1}$.
- מוציאים את החזקה הקטנה כגורם משותף; במכנים לוקחים את הגדולה.
- מספר קבוע שמופיע גם בהנחה וגם במטרה מניחים בצד.

תרגילים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

1. $3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

2. $2 + 8 + 32 + \cdots + 2 \cdot 4^{n-1} = \frac{2}{3}(4^n - 1)$

3. $\frac{6}{7} + \frac{6}{7^2} + \frac{6}{7^3} + \cdots + \frac{6}{7^n} = 1 - \frac{1}{7^n}$

4. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$

5. $1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1 + (2n-1) \cdot 3^n}{4}$

6. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \cdots + n \cdot 4^n = \frac{4}{9} \cdot [(3n-1) \cdot 4^n + 1]$

7. $1 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^n = 3 + (n-1) \cdot 3^{n+1}$

8. $1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 25 + \cdots + n \cdot 5^{n-1} = \frac{1 + (4n-1) \cdot 5^n}{16}$

9. $5 + 17 + 65 + \cdots + (4^n + 1) = \frac{4^{n+1} + 3n - 4}{3}$

10. $0 + 3 + 9 + \cdots + (3 \cdot 2^{n-1} - 3) = 3 \cdot 2^n - 3n - 3$

11. $5 + 50 + 375 + \cdots + n \cdot 5^n = \frac{5}{16} \cdot [(4n-1) \cdot 5^n + 1]$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}=\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 3^n} \quad .12$$

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{n}{4^{n-1}}=\frac{4^{n+1}-3n-4}{9\cdot 4^{n-1}} \quad .13$$

$$1+\frac{4}{4}+\frac{7}{4^2}+\cdots+\frac{3n-2}{4^{n-1}}=\frac{1}{3}\cdot\left[8-\frac{3n+2}{4^{n-1}}\right] \quad .14$$

$$\frac{4}{3}+\frac{28}{9}+\frac{244}{27}+\cdots+\frac{3^{2n-1}+1}{3^n}=\frac{3^{2n}-1}{2\cdot 3^n} \quad .15$$

הוכחה עבור n זוגי ועבור n אי־זוגי

לפעמים הטענה נכונה רק עבור n **זוגי** (או רק עבור n **אי־זוגי**). במקרה כזה משנים שני דברים בהוכחה:

מה משתנה?

- **שלב הבדיקה:** מציבים את המספר הראשון מהסוג המבוקש: $n=2$ עבור זוגי, $n=1$ עבור אי־זוגי.
- **שלב ההוכחה:** המספר הבא מאותו סוג אחרי k הוא $k+2$, ולא $k+1$. לכן מוכיחים עבור $n=k+2$.

בדומינו: האבנים הן רק $2,4,6,8,\ldots$. אבן מספר k מפילה את האבן $k+2$, כי זו האבן הבאה בשורה.

האיבר שלפני האחרון. בסכום עם $n=k+2$, האיבר שלפני האחרון מתקבל כשמציבים $n=k$ באיבר הכללי (ולא $k+1$!), כי הסכום "קופץ" בשתיים. ושוב, זה בדיוק האיבר האחרון משלב ההנחה.

7.1 דוגמה פתורה

דוגמה 7.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי זוגי מתקיים: $2+6+10+\cdots+(2n-2)=\dfrac{n^2}{2}$

כאן האיברים מתקבלים מהצבת $n=2,4,6,\ldots$: עבור $n=2$ מקבלים 2, עבור $n=4$ מקבלים 6, עבור $n=6$ מקבלים 10.

שלב הבדיקה ($n=2$)

עבור $n=2$ האיבר האחרון הוא $2\cdot 2-2=2$, וזה האיבר הראשון. אגף שמאל: 2. אגף ימין: $\dfrac{2^2}{2}=2$. ✓

שלב ההנחה ($n=k$, k זוגי)

$$2+6+10+\cdots+(2k-2)=\frac{k^2}{2}$$

שלב ההוכחה ($n=k+2$)

האיבר האחרון: $2(k+2)-2=2k+2$. צריך להוכיח:

$$2+6+10+\cdots+(2k+2)=\frac{(k+2)^2}{2}$$

ההוכחה

האיבר שלפני $(2k+2)$ הוא $(2k-2)$ (הצבה של $n=k$), האיבר האחרון משלב ההנחה:

$$\begin{aligned}2+6+\cdots+(2k+2) &= 2+6+\cdots+(2k-2)+(2k+2)\\ &= \frac{k^2}{2}+(2k+2)\\ &= \frac{k^2+4k+4}{2}\\ &= \frac{(k+2)^2}{2}\end{aligned}$$

במונה זיהינו נוסחת כפל מקוצר: $k^2+4k+4=(k+2)^2$. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=2$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ זוגי הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+2$.
לכן הטענה נכונה לכל n טבעי זוגי.

גם כאן יכול להתקבל יותר מאיבר אחד. בתרגיל 1 למטה, $3+7+11+\cdots+(2n+3)$, ההצבה $n=2$ באיבר האחרון נותנת 7. לכן בשלב הבדיקה אגף שמאל הוא $3+7$, שני איברים.

לסיכום: זוגי ואי־זוגי

- **זוגי:** בדיקה עבור $n=2$. **אי־זוגי:** בדיקה עבור $n=1$.
- ההנחה עבור $n=k$, וההוכחה עבור $n=k+2$.
- האיבר שלפני האחרון מתקבל מהצבת $n=k$ באיבר הכללי.
- המשפט המסכם אומר "לכל n טבעי זוגי" (או "אי־זוגי").

תרגילים

1. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי **זוגי** מתקיים השוויון: $3+7+11+\cdots+(2n+3)=\frac{(n+2)(n+3)}{2}$

2. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי **זוגי** מתקיים השוויון: $4+10+16+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n+2)}{4}$

3. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי **זוגי** מתקיים השוויון: $5+13+21+\cdots+(4n-3)=\frac{n(2n+1)}{2}$

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי **אי־זוגי** מתקיים השוויון:

$$3+7+11+\cdots+(2n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

5. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי **אי־זוגי** מתקיים השוויון:

$$2+8+14+\cdots+(3n-1)=\frac{(n+1)(3n+1)}{4}$$

6. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי **אי־זוגי** מתקיים השוויון: $4+12+20+\cdots+4n=(n+1)^2$

פרק 8

סדרות עם סימנים מתחלפים

בסדרה עם **סימנים מתחלפים** האיברים מתחלפים בין חיובי לשלילי: $\cdots + 22 - 18 + 14 - 10$. מי שגורם לזה הוא הרכיב $(-1)^{n-1}$ שבאיבר הכללי.

8.1 מה עושה הרכיב $(-1)^{n-1}$?

- כשמציבים n **אי־זוגי** $(1, 3, 5, \ldots)$, המעריך $n-1$ **זוגי**, ולכן $(-1)^{n-1} = +1$. האיבר **חיובי**.
- כשמציבים n **זוגי** $(2, 4, 6, \ldots)$, המעריך $n-1$ **אי־זוגי**, ולכן $(-1)^{n-1} = -1$. האיבר **שלילי**.

n	1	2	3	4
$(-1)^{n-1}$	$+1$	-1	$+1$	-1
$(-1)^{n-1}(4n+6)$	10	-14	18	-22

הרכיב $(4n+6)$ קובע את **הגודל** של האיבר (הערך המוחלט), והרכיב $(-1)^{n-1}$ קובע את **הסימן**.

הקשר החשוב: $(-1)^{k-1} = -(-1)^k$

שתי דרכים לראות את זה:

1. לפי $a^{k-1} = \frac{a^k}{a}$: $(-1)^{k-1} = \frac{(-1)^k}{-1} = -(-1)^k$, כי חלוקה במינוס 1 היא כמו כפל במינוס 1.
2. בהוצאת גורם משותף: אם מוציאים $(-1)^k$ מתוך $(-1)^{k-1}$, נשאר $(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$.

8.2 חזקות אחרות של (-1)

לא תמיד המעריך הוא $n-1$. מה שקובע הוא **הסימן של האיבר הראשון**:

הרכיב	$n=1$	$n=2$	$n=3$	הסדרה מתחילה ב־
$(-1)^{n-1}$	$+$	$-$	$+$	חיובי
$(-1)^{n+1}$	$+$	$-$	$+$	חיובי
$(-1)^{n}$	$-$	$+$	$-$	שלילי

$(-1)^{n+1}$ ו־$(-1)^{n-1}$ תמיד שווים, כי המעריכים שלהם נבדלים ב־2, ו־$(-1)^2 = 1$. לעומת זאת $(-1)^n$ הפוך בסימן, ולכן סדרה כמו $\cdots - 8 + 6 - 4 + 2$ מתחילה במינוס.

הקשרים שנשתמש בהם בשלב ההוכחה

$$(-1)^{k+2} = (-1)^k \qquad (-1)^{k-1} = -(-1)^k \qquad (-1)^{k+1} = -(-1)^k$$

כלומר: הגדלה או הקטנה של המעריך ב־1 **הופכת** את הסימן, והגדלה ב־2 **לא משנה** אותו.

הסימן יכול להיות "מובנה" בבסיס. ב־$(-3)^{n-1}$ או ב־$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ אין רכיב (-1) נפרד, אבל הבסיס שלילי ולכן הסימנים מתחלפים. כאן עובדים לפי חוקי החזקות: $(-3)^k = (-3)\cdot(-3)^{k-1}$.

8.3 דוגמה פתורה

דוגמה 8.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$8 - 12 + 16 - 20 + \cdots + (-1)^{n+1}(4n+4) = (-1)^{n+1}(2n+3) + 3$$

שלב הבדיקה

עבור $n = 1$ האיבר האחרון הוא $(-1)^2 \cdot (4+4) = 8$, וזה גם האיבר הראשון. אגף שמאל: 8. אגף ימין: $(-1)^2 \cdot (2+3) + 3 = 8$. ✓

שלב ההנחה ($n = k$)

$$8 - 12 + 16 - \cdots + (-1)^{k+1}(4k+4) = (-1)^{k+1}(2k+3) + 3$$

שלב ההוכחה ($n = k+1$)

כשמציבים $k+1$ המעריך הוא $k+2$, ו־$(-1)^{k+2} = (-1)^k$ (הגדלה ב־2 לא משנה את הסימן). נפתח סוגריים ונקבל שצריך להוכיח:

$$8 - 12 + 16 - \cdots + (-1)^k(4k+8) = (-1)^k(2k+5) + 3$$

ההוכחה

את $+3$ שבמטרה **מניחים בצד**. אחרי ההחלפה נכתוב $(-1)^{k+1} = -(-1)^k$, ונוציא $(-1)^k$ כגורם משותף, כי זה מה שמופיע במטרה:

$$\begin{aligned}
8 - 12 + \cdots + (-1)^k(4k+8) &= 8 - 12 + \cdots + (-1)^{k+1}(4k+4) + (-1)^k(4k+8) \\
&= (-1)^{k+1}(2k+3) + 3 + (-1)^k(4k+8) \\
&= -(-1)^k(2k+3) + (-1)^k(4k+8) + 3 \\
&= (-1)^k[-(2k+3) + (4k+8)] + 3 \\
&= (-1)^k(2k+5) + 3
\end{aligned}$$

בשורה השלישית החלפנו $(-1)^{k+1}$ ב־$-(-1)^k$: הגדלה של המעריך ב־1 הופכת את הסימן. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=1$, וממה שהנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

לסיכום: סימנים מתחלפים

- $(-1)^{n-1}$ חיובי עבור n אי־זוגי ושלילי עבור n זוגי. הוא קובע את הסימן בלבד.
- $(-1)^{n+1}$ ו־$(-1)^{n-1}$ מתחילים בפלוס; $(-1)^n$ מתחיל במינוס.
- בשלב ההוכחה: $(-1)^{(k+1)-1}=(-1)^k$, ובאותה דרך $(-1)^{k+1}=-(-1)^k$.
- הקשר המרכזי: $(-1)^{k-1}=-(-1)^k$. בעזרתו מוציאים $(-1)^k$ כגורם משותף.
- מספר קבוע במטרה (כמו $+3$) מניחים בצד.

תרגילים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

1. $-2+4-6+8-\cdots+(-1)^n\cdot 2n=\dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{2}$

2. $10-14+18-22+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(4n+6)=(-1)^{n-1}(2n+4)+4$

3. $2-6+18-54+\cdots+2\cdot(-3)^{n-1}=\dfrac{1}{2}[1-(-3)^n]$

4. $3-5+7-9+\cdots+(-1)^{n+1}(2n+1)=(-1)^{n+1}(n+1)+1$

5. $-5+7-9+11-\cdots+(-1)^n(2n+3)=(-1)^n(n+2)-2$

6. $1-3+5-7+\cdots+(-1)^{n-1}(2n-1)=(-1)^{n-1}\cdot n$

7. $1-4+9-16+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$

8. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{3}{4}\left[1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$

9. $3-6+12-24+\cdots+3\cdot(-2)^{n-1}=1-(-2)^n$

$$4 - 7 + 10 - 13 + \cdots + (-1)^{n-1}(3n+1) = \frac{(-1)^{n-1}(6n+5)+5}{4} \quad .10$$

$$-1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + \cdots + (-1)^{n} n(n+1) = \frac{(-1)^{n}(2n^2+4n+1)-1}{4} \quad .11$$

פרק 9

אינדוקציה עם עצרת

9.1 מהי עצרת?

הגדרה. לכל n טבעי, n **עצרת** (מסמנים $n!$) היא המכפלה של כל המספרים הטבעיים מ־1 עד n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

למשל:

$$\begin{aligned} 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\ 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\ 5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \end{aligned}$$

בנוסף מגדירים: $0! = 1$

הדבר הכי חשוב בפרק הזה הוא הקשר בין עצרת של מספר לעצרת של המספר שלפניו:

הקשר המרכזי

$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) \qquad (k+2)! = k! \cdot (k+1)(k+2)$$

$$\frac{(k+2)!}{k!} = (k+1)(k+2)$$

איך משתמשים בזה בהוכחה? אחרי ההחלפה לפי ההנחה מופיעות כמה עצרות שונות, למשל $k!$ ו־$(k+1)!$. כותבים את הגדולה בעזרת הקטנה ($(k+1)! = k! \cdot (k+1)$), ואז מוציאים את הקטנה כגורם משותף. בשברים עושים ההפך: המכנה המשותף הוא העצרת **הגדולה**.

9.2 דוגמה פתורה

דוגמה 9.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2 \cdot 1! + 5 \cdot 2! + 10 \cdot 3! + \cdots + (n^2+1) \cdot n! = n \cdot (n+1)!$$

שלב הבדיקה

עבור $n = 1$: אגף שמאל $2 \cdot 1! = 2$, אגף ימין $1 \cdot 2! = 2$. ✓

שלב ההנחה ($n = k$)

$$2 \cdot 1! + 5 \cdot 2! + \cdots + (k^2+1) \cdot k! = k \cdot (k+1)!$$

שלב ההוכחה ($n = k+1$)

האיבר האחרון: $((k+1)^2+1)\cdot(k+1)! = (k^2+2k+2)\cdot(k+1)!$. צריך להוכיח:

$$2\cdot 1! + 5\cdot 2! + \cdots + (k^2+2k+2)\cdot(k+1)! = (k+1)\cdot(k+2)!$$

ההוכחה

$$\begin{aligned}
2\cdot 1! + \cdots + (k^2+2k+2)(k+1)! &= 2\cdot 1! + \cdots + (k^2+1)\cdot k! + (k^2+2k+2)(k+1)! \\
&= k\cdot(k+1)! + (k^2+2k+2)(k+1)! \\
&= (k+1)!(k+k^2+2k+2) \\
&= (k+1)!\,(k+1)(k+2) \\
&= (k+1)\cdot(k+2)!
\end{aligned}$$

בשורה האחרונה השתמשנו ב־$(k+2)! = (k+2)\cdot(k+1)!$. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

לסיכום: עצרת

- $n! = 1\cdot 2\cdots n$, ו־$0! = 1$.
- $(k+1)! = k!\cdot(k+1)$: כך כותבים עצרת גדולה בעזרת קטנה.
- מוציאים את העצרת הקטנה כגורם משותף; במכנים לוקחים את הגדולה.
- את הביטוי $(k+1)(k+2)$ שמתקבל בסוף "מחזירים" לעצרת: $k!\cdot(k+1)(k+2) = (k+2)!$.

תרגילים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים השוויון:

1. $2\cdot 2! + 3\cdot 3! + 4\cdot 4! + \cdots + (n+1)\cdot(n+1)! = (n+2)! - 2$

2. $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

3. $3\cdot 1! + 7\cdot 2! + 13\cdot 3! + \cdots + (n^2+n+1)\cdot n! = (n+1)\cdot(n+1)! - 1$

4. $\dfrac{3!}{1!} + \dfrac{4!}{2!} + \dfrac{5!}{3!} + \cdots + \dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{n(n^2+6n+11)}{3}$

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}\text{.5}$$

$$5\cdot 1!+8\cdot 3\cdot 2!+11\cdot 3^2\cdot 3!+\cdots+(3n+2)\cdot 3^{n-1}\cdot n!=3^n\cdot(n+1)!-1\text{.6}$$

$$-\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}-\frac{5}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n(n+2)}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}-1\text{.7}$$

אינדוקציה עם זהויות טריגונומטריות

גם שוויונות שבהם מופיעים $\sin$ ו־$\cos$ מוכיחים באינדוקציה, בדיוק באותם שלבים. ההבדל הוא באלגברה של שלב ההוכחה: במקום מכנה משותף או גורם משותף, נשתמש ב**זהויות הטריגונומטריות** מדף הנוסחאות. בכל התרגילים מניחים ש־$\sin\alpha \neq 0$.

הזהויות שנשתמש בהן (כולן בדף הנוסחאות)

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

10.1 דוגמה פתורה

דוגמה 10.1 • הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \cdots + \sin 2n\alpha = \frac{\sin n\alpha \cdot \sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha}$$

שלב הבדיקה

עבור $n = 1$: אגף שמאל $\sin 2\alpha$. אגף ימין: $\frac{\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \sin 2\alpha$. ✓

שלב ההנחה ($n = k$)

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \cdots + \sin 2k\alpha = \frac{\sin k\alpha \cdot \sin(k+1)\alpha}{\sin \alpha}$$

שלב ההוכחה ($n = k+1$)

$$\sin 2\alpha + \cdots + \sin(2k+2)\alpha = \frac{\sin(k+1)\alpha \cdot \sin(k+2)\alpha}{\sin \alpha}$$

ההוכחה

נחליף לפי ההנחה, ונכתוב את האיבר החדש בעזרת זווית כפולה:

$\sin(2k+2)\alpha = 2\sin(k+1)\alpha\cos(k+1)\alpha$.

$$\sin 2\alpha + \cdots + \sin(2k+2)\alpha = \frac{\sin k\alpha \cdot \sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha} + 2\sin(k+1)\alpha\cos(k+1)\alpha$$
$$= \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}[\sin k\alpha + 2\sin\alpha\cos(k+1)\alpha]$$

נשאר להראות שהסוגריים המרובעים שווים ל־$\sin(k+2)\alpha$. נכתוב $k\alpha=(k+1)\alpha-\alpha$:

$$\begin{aligned}&\sin k\alpha+2\sin\alpha\cos(k+1)\alpha\\=\;&\sin(k+1)\alpha\cos\alpha-\cos(k+1)\alpha\sin\alpha+2\sin\alpha\cos(k+1)\alpha\\=\;&\sin(k+1)\alpha\cos\alpha+\cos(k+1)\alpha\sin\alpha\\=\;&\sin(k+2)\alpha\end{aligned}$$

ולכן אגף שמאל שווה ל־$\frac{\sin(k+1)\alpha\cdot\sin(k+2)\alpha}{\sin\alpha}$. ✓

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

טיפ: "לפרק" את הזווית לפי המטרה. במטרה מופיעה הזווית $(k+2)\alpha$, ובהנחה $k\alpha$. כותבים את שתיהן בעזרת הזווית שבאמצע, $(k+1)\alpha$: $(k+2)\alpha=(k+1)\alpha+\alpha$ ו־$k\alpha=(k+1)\alpha-\alpha$, ואז משתמשים בנוסחאות הסכום וההפרש.

לסיכום: זהויות טריגונומטריות

- השלבים זהים: בדיקה, הנחה, הוכחה, משפט מסכם.
- בשלב ההוכחה מוציאים גורם משותף, ואת מה שנשאר מסדרים בעזרת $\sin(x\pm y)$, $\cos(x\pm y)$ ו־$\sin 2x$.
- כותבים את כל הזוויות בעזרת זווית אחת "באמצע", למשל $(k+1)\alpha\pm\alpha$.

תרגילים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי (ולכל α שעבורו $\sin\alpha\neq 0$) מתקיים:

1. $\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cdots+\cos 2n\alpha=\frac{\sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$

2. $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdots\cos(2^{n-1}\alpha)=\frac{\sin(2^n\alpha)}{2^n\sin\alpha}$

3. $\sin\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha\cos n\alpha=\frac{\sin n\alpha\cdot\sin(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$

4. $\cos^2\alpha+\cos^{22}\alpha+\cdots+\cos^2 n\alpha=\frac{n}{2}+\frac{\sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$

$$\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots + \sin (2n+1)\alpha = \frac{\sin^2 (n+1)\alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}. \quad 5$$

כשנתונה רק הנוסחה לאיבר הכללי

לפעמים השאלה לא כותבת את הסכום עם האיברים הראשונים, אלא נותנת **נוסחה לאיבר הכללי** a_n, ומבקשת להוכיח נוסחה לסכום $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

מה עושים?

- **בבדיקה:** מחשבים את a_1 מהנוסחה, ומשווים לאגף ימין עם $n = 1$.
- **בהנחה:** $a_1 + a_2 + \cdots + a_k =$ (אגף ימין עם k).
- **בהוכחה:** $a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}$. מחליפים את $a_1 + \cdots + a_k$ לפי ההנחה, ואת a_{k+1} **מחשבים מהנוסחה** (מציבים $n = k + 1$).

11.1 דוגמה פתורה

דוגמה 11.1 • סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3^n + n - 1$$

שלב הבדיקה

$a_1 = 2 \cdot 3^0 + 1 = 3$. אגף ימין עם $n = 1$: $3^1 + 1 - 1 = 3$. ✓

שלב ההנחה ($n = k$)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 3^k + k - 1$$

שלב ההוכחה ($n = k + 1$)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = 3^{k+1} + k$$

ההוכחה

לפי הנוסחה, $a_{k+1} = 2 \cdot 3^k + 1$:

$$\begin{aligned} a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} &= a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} \\ &= 3^k + k - 1 + 2 \cdot 3^k + 1 \\ &= 3 \cdot 3^k + k \\ &= 3^{k+1} + k \end{aligned}$$

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n=1$, וממה שהנחה שהיא נכונה עבור $n=k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n=k+1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

סכום שלא מגיע עד a_n. לפעמים מבקשים להוכיח נוסחה ל־$a_1+\cdots+a_{n-2}$, לכל $n\geq 3$. אז הבדיקה היא עבור $n=3$ (הסכום הוא רק a_1), ובמעבר מ־k ל־$k+1$ מתווסף האיבר a_{k-1}.

תרגילים

1. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה $a_n=n(n+3)$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה $a_n=3\cdot 2^n-2$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=3\cdot 2^{n+1}-2n-6$$

3. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה $a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n}{2(n+2)}$$

4. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה $a_n=(-1)^n(2n+1)$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=(-1)^n(n+1)-1$$

5. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה $a_n=5\cdot 4^{n-1}-1$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{5(4^n-1)}{3}-n$$

6. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה $a_n=n(n+2)$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי שגדול או שווה ל־3 מתקיים:
$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-1)(2n+3)}{6}$$

מכלל נסיגה לנוסחה לפי מקום

סדרה אפשר להגדיר בשתי דרכים: בעזרת **כלל נסיגה** (האיבר הראשון, ואיך מקבלים כל איבר מהאיבר שלפניו), או בעזרת **נוסחה לפי מקום** (a_n כביטוי ב־n). באינדוקציה מוכיחים ששתי ההגדרות נותנות את אותה סדרה.

מה שונה כאן? הטענה היא על **איבר אחד**, a_n, ולא על סכום. בשלב ההוכחה לא "חושפים" סכום, אלא משתמשים ב**כלל הנסיגה**: a_{k+1} נכתב בעזרת a_k, ואת a_k מחליפים לפי ההנחה.

12.1 דוגמה פתורה

דוגמה 12.1 • סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 3$ ו־$a_{n+1} = 2a_n$ לכל n טבעי. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

שלב הבדיקה

עבור $n = 1$: לפי הנתון $a_1 = 3$, ולפי הנוסחה $3 \cdot 2^0 = 3$. ✓

שלב ההנחה ($n = k$)

$$a_k = 3 \cdot 2^{k-1}$$

שלב ההוכחה ($n = k + 1$)

$$a_{k+1} = 3 \cdot 2^k$$

ההוכחה

בשורה הראשונה משתמשים בכלל הנסיגה, ובשורה השנייה מחליפים את a_k לפי ההנחה:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2\,a_k \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2^{k-1} \\ &= 3 \cdot 2^k \end{aligned}$$

משפט מסכם

הטענה נכונה עבור $n = 1$, ומההנחה שהיא נכונה עבור $n = k$ הוכחנו שהיא נכונה עבור $n = k + 1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

הכיוון ההפוך לא צריך אינדוקציה. אם נתונה נוסחה, למשל $a_n = 7 \cdot 2^n$, כדי להראות שהסדרה מקיימת $a_{n+1} = 2a_n$ מספיק להציב: $a_{n+1} = 7 \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot 7 \cdot 2^n = 2a_n$. ואת האיבר הראשון מחשבים: $a_1 = 14$.

לסיכום: כלל נסיגה

- הטענה היא על a_n עצמו. בבדיקה משווים את a_1 הנתון לנוסחה.
- בשלב ההוכחה: a_{k+1} לפי כלל הנסיגה, ואז מחליפים את a_k לפי ההנחה.
- מנוסחה לכלל נסיגה: מציבים $n+1$ בנוסחה ומשווים ל־a_n, בלי אינדוקציה.

תרגילים

1. סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 5$ ו־$a_{n+1} = 3a_n$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$

2. סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = \frac{1}{2}$ ו־$a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$

3. סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = -4$ ו־$a_{n+1} = -2a_n$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $a_n = -4 \cdot (-2)^{n-1}$

4. סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 6$ ו־$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.

   א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $a_n = \frac{12}{2^n}$

   ב. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 12 - \frac{12}{2^n}$

5. סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 4$ ו־$a_{n+1} = 3a_n$.

   א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

   ב. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2(3^n - 1)$

   ג. מצאו את n אם נתון: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1456$

6. סדרה נתונה על ידי הנוסחה $a_n = 7 \cdot 2^n$. הראו שהסדרה מקיימת $a_{n+1} = 2a_n$ לכל n טבעי, ומצאו את a_1.

תשובות

תרגיל	א	ב	ג
5			$n = 6$
6	$a_1 = 14$		

פרק 13

כשלים באינדוקציה: מה קורה כשחסר שלב?

הוכחה באינדוקציה צריכה **שני** חלקים: הבדיקה וצעד האינדוקציה. בפרק הזה נראה מה קורה כשאחד מהם חסר, ואיך לזהות טענה נכונה מתוך כמה אפשרויות.

13.1 הצעד מתקיים, אבל הבדיקה נכשלת

דוגמה 13.1 • נתונה הטענה: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{n+1}$

הצעד מתקיים. נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, ונוסיף את האיבר $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$:

$$\frac{2k+1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(2k+1)(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{2k^2+5k+3}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(2k+3)(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{2k+3}{k+2}$$

וזה בדיוק אגף ימין עם $n=k+1$.

אבל הבדיקה נכשלת: עבור $n=1$ אגף שמאל הוא $\frac{1}{2}$, ואגף ימין $\frac{3}{2}$. **הטענה לא נכונה**, אף שהצעד הצליח.

13.2 הבדיקה מצליחה, אבל אין צעד

דוגמה 13.2 • נתונה הטענה: $2+4+6+\cdots+2n=n^3-5n^2+12n-6$

עבור $n=1,2,3$ שני האגפים שווים (2, 6, 12). אבל עבור $n=4$ אגף שמאל הוא 20 ואגף ימין 26. **כמה בדיקות מוצלחות לא מוכיחות כלום** בלי צעד האינדוקציה.

מסקנה. אם בשאלה כתוב "נתון שהוכח שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ אז היא נכונה עבור $n=k+1$", התשובה ל"האם ניתן להסיק שהטענה נכונה לכל n?" היא **לא**, כי חסר שלב הבדיקה. וכנ"ל אם רק בדקו כמה ערכים בלי צעד.

13.3 איזו מהטענות נכונה?

לפעמים נותנים כמה נוסחאות לאותו סכום, ורק אחת מהן נכונה. **הדרך:** מציבים $n = 1, 2, 3, \ldots$ בכל הנוסחאות ומשווים לסכום עצמו, עד שנשארת רק נוסחה אחת. אותה מוכיחים באינדוקציה.

דוגמה 13.3 • רק אחת מהנוסחאות נכונה עבור $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$:

$$(1)\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2)\ 4n - 3 \qquad (3)\ \frac{n^3 + n}{2}$$

n	הסכום	(1)	(2)	(3)
1	1	1	1	1
2	5	5	5	5
3	14	14	9	15

רק נוסחה (1) נשארת, ואותה מוכיחים באינדוקציה כרגיל.

לסיכום: כשלים

- **בלי בדיקה** אין הוכחה, גם אם הצעד הצליח.
- **בלי צעד** אין הוכחה, גם אם הבדיקה הצליחה עבור הרבה ערכים.
- בשלב ההנחה מניחים עבור $n = k$, ולא "לכל n".
- כדי לבחור בין כמה נוסחאות: מציבים ערכים קטנים עד שנשארת אחת, ומוכיחים אותה.

תרגילים

1. נתונה הטענה: $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n = k$ טבעי כלשהו, אז היא נכונה גם עבור $n = k + 1$.

ב. האם מתשובתכם לסעיף א' ניתן להסיק שהטענה נכונה לכל n טבעי? נמקו.

ג. בדקו את הטענה עבור $n = 1$. מה אפשר לומר עכשיו על הטענה?

2. נתונה הטענה: $3+7+11+\cdots+(4n-1)=2n^2+n+3$

   א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$, אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$.

   ב. האם הטענה נכונה לכל n טבעי? נמקו.

3. נתונה הטענה: $1+3+9+\cdots+3^{n-1}=2n^2-3n+2$

   א. הראו שהטענה נכונה עבור $n=1$ ועבור $n=2$.

   ב. האם מתשובתכם לסעיף א' ניתן להסיק שהטענה נכונה לכל n טבעי? נמקו.

   ג. בדקו את הטענה עבור $n=3$.

4. לפניכם שתי נוסחאות לסכום $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+n(2n+1)$. רק אחת מהן נכונה לכל n טבעי.

   $(1)\ \ \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$ $(2)\ \ 5n^2-5n+3$

   א. הראו ששתי הנוסחאות נותנות תוצאה נכונה עבור $n=1$ ועבור $n=2$.

   ב. קבעו איזו נוסחה נכונה, והוכיחו אותה באינדוקציה.

5. לפניכם שלוש נוסחאות לסכום $2+6+12+\cdots+n(n+1)$. רק אחת מהן נכונה לכל n טבעי. קבעו איזו, והוכיחו אותה באינדוקציה.

   $(1)\ \ 6n^2-12n+8$ $(2)\ \ \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $(3)\ \ 2^{2n-1}$

6. נתונה הטענה: $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{27}+\cdots+\dfrac{2}{3^n}=2-\dfrac{1}{3^n}$

   א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$, אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$.

   ב. האם הטענה נכונה לכל n טבעי? נמקו.

7. תלמיד כתב הוכחה באינדוקציה. בשלב ההנחה הוא רשם: "נניח שהטענה נכונה לכל n טבעי". מה הבעיה בניסוח הזה? איך צריך לנסח את שלב ההנחה?

תשובות

תרגיל	א	ב	ג
1		לא, חסר שלב הבדיקה	הטענה לא נכונה: $\frac{1}{6} \neq \frac{2}{3}$
2		לא: עבור $n = 1$ מתקבל $3 \neq 6$	
3		לא, חסר צעד האינדוקציה	לא נכונה: $13 \neq 11$
4		נוסחה (1)	
5	נוסחה (2)		
6		לא: עבור $n = 1$ מתקבל $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{3}$	
7	מניחים את מה שצריך להוכיח. צריך: "נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$"		

חישובים, מציאת n ופרמטרים

אחרי שמוכיחים שוויון, השאלה ממשיכה בדרך כלל לסעיפי חישוב. בפרק הזה נאסוף את כל סוגי הסעיפים האלה.

14.1 מציאת n כשהסכום נתון

דוגמה 14.1 • ידוע ש־$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. מצאו את n אם $1+2+\cdots+n=210$.

$$\frac{n(n+1)}{2}=210 \quad\Rightarrow\quad n^2+n-420=0 \quad\Rightarrow\quad n=20 \ \ (\text{או } n=-21)$$

n טבעי, ולכן $n=20$.

האיבר האחרון. כשמבקשים "מהו האיבר האחרון", מוצאים קודם את n (כמו בדוגמה), ואז מציבים אותו באיבר הכללי.

14.2 מציאת פרמטרים

דוגמה 14.2 • נתון שלכל n טבעי: $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an}{bn+1}$. מצאו את a ואת b.

הטענה נכונה **לכל** n, ולכן גם עבור $n=1$ ו־$n=2$:

- $n=1$: $\frac{1}{3}=\frac{a}{b+1}$, כלומר $3a=b+1$.
- $n=2$: $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}=\frac{2a}{2b+1}$, כלומר $5a=2b+1$.

פותרים את מערכת המשוואות ומקבלים $a=1$, $b=2$.

14.3 נוסחה לסכום חדש בעזרת סכום ידוע

דוגמה 14.3 • ידוע ש־$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. מצאו נוסחה ל־$3+6+9+\cdots+3n$ ול־$1+3+5+\cdots+(2n-1)$.

הוצאת גורם משותף: $3+6+\cdots+3n=3(1+2+\cdots+n)=\dfrac{3n(n+1)}{2}$

הצבה וחיסור: הסכום $1+2+\cdots+2n$ מתקבל כשמציבים $2n$ במקום n: $\dfrac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$.
ממנו מחסירים את האיברים הזוגיים, $2+4+\cdots+2n=n(n+1)$:

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n(2n+1)-n(n+1)=n^2$$

לסיכום: סעיפי חישוב

- **חישוב סכום:** מוצאים את n של האיבר האחרון ומציבים באגף ימין. סכום מהאמצע: עד האחרון, פחות עד זה שלפני הראשון.
- **מציאת n:** משווים את אגף ימין לסכום הנתון ופותרים.
- **פרמטרים:** מציבים $n=1$ ו־$n=2$ ופותרים מערכת משוואות.
- **סכום חדש:** מוציאים גורם משותף, מציבים $2n$ במקום n, או מחסירים סכום ידוע.

תרגילים

1. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ב. חשבו את הסכום: $11^2+12^2+13^2+\cdots+30^2$

ג. מצאו (באמצעות n) נוסחה לסכום: $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2$

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים ומצאו נוסחה לסכום: $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

2. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

ב. חשבו את הסכום: $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{28\cdot31}$

ג. חשבו את הסכום: $\dfrac{1}{10\cdot13}+\dfrac{1}{13\cdot16}+\cdots+\dfrac{1}{28\cdot31}$

ד. סכום הטור שבסעיף א׳ הוא $\dfrac{15}{46}$. מצאו את האיבר האחרון בטור.

3. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

ב. מצאו את n אם נתון: $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)=806$

ג. חשבו את הסכום: $5\cdot 7+6\cdot 8+\cdots+12\cdot 14$

4. נתון שלכל n טבעי מתקיים: $2+5+8+\cdots+(3n-1)=an^2+bn$ (a ו־b מספרים קבועים).

א. מצאו את a ואת b. (היעזרו בהצבת $n=1$ ו־$n=2$.)

ב. הוכיחו באינדוקציה שעבור הערכים שמצאתם השוויון נכון לכל n טבעי.

5. נתון שלכל n טבעי מתקיים: $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{n}{an+b}$

א. מצאו את a ואת b.

ב. הוכיחו באינדוקציה שעבור הערכים שמצאתם השוויון נכון לכל n טבעי.

ג. חשבו את הסכום: $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{38\cdot 40}$

6. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$

ב. חשבו את הסכום: $2^5+2^6+\cdots+2^{12}$

ג. מצאו את n אם נתון: $2+2^2+2^3+\cdots+2^n=1022$

7. p הוא מספר טבעי.

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(p+1)+(p+3)+(p+5)+\cdots+(p+2n-1)=n(n+p)$$

ב. מצאו את p אם נתון: $(p+1)+(p+3)+\cdots+(p+39)=600$

8. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1-4+7-10+\cdots+(-1)^{n-1}(3n-2)=\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)-1}{4}$$

ב. חשבו את הסכום: $1-4+7-\cdots-58$

ג. חשבו את הסכום: $13-16+19-\cdots-58$

9. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

ב. חשבו את הסכום: $\frac{5}{6!}+\frac{6}{7!}+\cdots+\frac{9}{10!}$ (אפשר להשאיר את התשובה עם עצרת).

10. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $4+10+18+\cdots+n(n+3)=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$

ב. נתון שסכום הטור שבסעיף א' הוא 1600. מהו האיבר האחרון בטור?

11. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מצאו נוסחה לסכום: $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3$ (רמז: הוציאו 2^3 כגורם משותף).

ג. היעזרו בסעיפים הקודמים ומצאו נוסחה לסכום: $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$

12. נתון הטור: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$. נסמן ב־$S_n$ את סכום n האיברים הראשונים בטור.

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $S_n=\frac{n}{n+1}$

ב. מצאו את n אם נתון: $S_{n+1}-S_n=\frac{1}{240}$

תשובות

תרגיל	א	ב	ג	ד
1		9070	$\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
2		$\frac{10}{31}$	$\frac{7}{310}$	$\frac{1}{43\cdot 46}$
3		$n=12$	756	
4	$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$			
5	$a=4,\ b=4$		$\frac{19}{80}$	
6		8160	$n=9$	
7		$p=10$		
8		-30	-24	
9		$\frac{1}{5!}-\frac{1}{10!}$		
10		$15\cdot 18=270$		
11		$2n^2(n+1)^2$	$n^2(2n^2-1)$	
12		$n=14$		

פרק 15

שאלות לחזרה

השאלות בפרק הזה מערבבות את כל סוגי התרגילים שבספר, כמו בבגרות. לפני שמתחילים, נסו לזהות לאיזה פרק כל שאלה שייכת.

תרגילים

1. פתרו את הסעיפים הבאים:

   א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי **אי־זוגי** מתקיים: $2+10+18+\cdots+(4n-2)=n(n+1)$

   ב. חשבו את הסכום: $2+10+18+\cdots+74$

2. פתרו את הסעיפים הבאים:

   א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $1+4+16+\cdots+4^{n-1}=\frac{4^n-1}{3}$

   ב. חשבו את הסכום: $4^3+4^4+\cdots+4^8$

3. פתרו את הסעיפים הבאים:

   א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

   $$2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+\cdots+(n+1)(n+3)=\frac{n(2n^2+15n+31)}{6}$$

   ב. חשבו את הסכום: $6\cdot 8+7\cdot 9+\cdots+20\cdot 22$

4. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי $a_n=2n+3^n$.

   א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי: $a_1+a_2+\cdots+a_n=n(n+1)+\frac{3^{n+1}-3}{2}$

   ב. חשבו את $a_1+a_2+\cdots+a_6$.

5. נתון שלכל n טבעי מתקיים: $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(an+b)}{3}$

   א. מצאו את a ואת b.

   ב. הוכיחו באינדוקציה שעבור הערכים שמצאתם השוויון נכון לכל n טבעי.

6. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

ב. סכום הטור שבסעיף א' הוא $\frac{25}{51}$. מצאו את מספר האיברים בטור ואת האיבר האחרון.

7. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$6-10+14-18+\cdots+(-1)^{n-1}(4n+2)=(-1)^{n-1}(2n+2)+2$$

ב. חשבו את הסכום: $6-10+14-\cdots-82$

8. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$7\cdot 1!+11\cdot 4\cdot 2!+15\cdot 4^2\cdot 3!+\cdots+(4n+3)\cdot 4^{n-1}\cdot n!=4^n\cdot(n+1)!-1$$

ב. מצאו את n אם נתון שסכום הטור הוא 1535.

9. נתונה הטענה: $3+5+7+\cdots+(2n+1)=n^2+2n+5$

א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$, אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$.

ב. האם הטענה נכונה לכל n טבעי? נמקו.

ג. תקנו את אגף ימין כך שהטענה תהיה נכונה לכל n טבעי, והוכיחו אותה באינדוקציה.

תשובות

תרגיל	א	ב	ג
1		380	
2		87360	
3		3205	
4		1134	
5	$a=1,\ b=2$		
6		25 איברים, האחרון $\dfrac{1}{49\cdot 51}$	
7		-40	
8		$n=3$	
9		לא: עבור $n=1$ מתקבל $3\neq 8$	n^2+2n

דף סיכום

סוג התרגיל	מה מיוחד בו	מה עושים בהוכחה
כל הוכחה	בדיקה, הנחה (k), הוכחה ($k+1$), משפט מסכם	חושפים את הסכום משלב ההנחה (רושמים את האיבר שלפני האחרון) ומחליפים אותו
סדרה חשבונית	האיבר האחרון כמו $an+b$	פותחים סוגריים בשני הצדדים ומשווים, או מפרקים לגורמים
יותר מאיבר אחד בבדיקה	הצבת $n=1$ באיבר האחרון לא נותנת את האיבר הראשון	בבדיקה רושמים את **כל** האיברים עד האיבר האחרון
מכפלות	איבר כמו $n(n+1)$	מוציאים גורם משותף, לרוב מכפלה כמו $(k+1)(k+2)$
חישוב סכום	"היעזרו בשוויון כדי לחשב"	מוצאים את n של האיבר האחרון ומציבים; סכום מהאמצע: עד האחרון פחות עד זה שלפני הראשון
שברים	איבר כמו $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$	מכנה משותף, פירוק המונה (המטרה רומזת על הגורמים), צמצום
חזקות	איבר כמו $n\cdot 3^n$	חוקי חזקות; מוציאים את החזקה הקטנה; במכנים לוקחים את הגדולה
זוגי / אי־זוגי	הטענה רק ל־n זוגי או אי־זוגי	בדיקה ב־$n=2$ (או $n=1$), הוכחה עבור $n=k+2$
סימנים מתחלפים	הרכיב $(-1)^{n-1}$, או בסיס $(-1)^n$ שלילי	ומוציאים $(-1)^{k-1}=-(-1)^k$ $(-1)^k$
עצרת	איבר כמו $(n^2+1)\cdot n!$	$(k+1)!=k!\cdot(k+1)$; מוציאים את העצרת הקטנה
נוסחה לאיבר הכללי	נתון a_n	מחשבים מהנוסחה a_{k+1}
זהויות טריגונומטריות	באגף שמאל $\sin$, $\cos$	גורם משותף, ואז $\sin(x\pm y)$, $\cos(x\pm y)$ $\sin 2x$
כלל נסיגה	נתונים a_1 ו־a_{n+1}	לפי הכלל, ואז a_{k+1} לפי ההנחה a_k
כשלים	חסר שלב	בלי בדיקה או בלי צעד אין הוכחה

סוג התרגיל	מה מיוחד בו	מה עושים בהוכחה
פרמטרים	לא ידועים a, b	מציבים $n = 1, 2$ ופותרים מערכת
מספר קבוע במטרה	למשל $4 + \ldots$ או $\ldots - \frac{5}{6}$	מניחים אותו בצד ועובדים על השאר

רשימת בדיקה לפני שמגישים

1. האם בשלב הבדיקה הצבתי $n = 1$ **באיבר האחרון** ורשמתי את כל האיברים עד אליו?
2. האם בשלב ההוכחה הצבתי $k + 1$ **בכל** מקום שבו היה n, ופתחתי סוגריים?
3. האם חשפתי את הסכום משלב ההנחה, והחלפתי אותו **רק** אחרי שהוא מופיע בשלמותו?
4. האם הגעתי **בדיוק** לאגף ימין של מה שצריך להוכיח?
5. האם רשמתי משפט מסכם?

טעויות נפוצות

- לשכוח את שלב הבדיקה, או לבצע אותו רק על האיבר הראשון כשמתקבל יותר מאיבר אחד.
- להציב $k + 1$ רק בחלק מהמקומות (למשל לשכוח להציב במעריך).
- לרשום את האיבר שלפני האחרון לא נכון. בדקו: זה תמיד האיבר האחרון משלב ההנחה.
- להתחיל מהמטרה ו"להגיע" ממנה לעצמה. מתחילים מאגף שמאל ומגיעים לאגף ימין.