מתמטיקורס

כל הבגרויות מכל השנים 581

www.matematicourse.com

0508338787

לחץ כאן כדי לצפות ב-פתרונות בוידאו לכל הבגרויות מכל השנים

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשפ"ו, 2026
מספר השאלון:	35571
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תוכנית חדשה

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וארבעים וחמש דקות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

(המשך מעבר לדף)

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקצייה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

ב. ליונתן יש בספרייה שבחדרו ספרים משני סוגים: ספרי קומיקס וספרי עיון.

60% מן הספרים הם ספרי קומיקס והשאר ספרי עיון.

70% מן הספרים הם בעברית והשאר באנגלית.

לפניכם שתי טענות I–II. קבעו בעבור כל אחת מהן אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעותיכם.

I. ליונתן אין ספרי קומיקס בעברית.

II. ההסתברות לבחור באקראי ספר בעברית מבין ספרי הקומיקס גדולה מן ההסתברות לבחור באקראי ספר קומיקס מבין הספרים שבעברית.

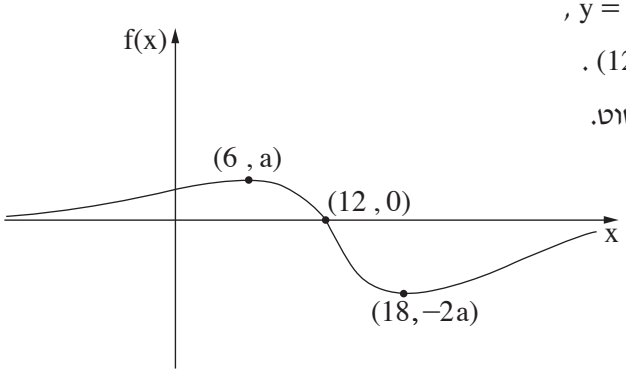
ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת בלבד, שמשוואתה $y=0$,

ונקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה־x, ששיעוריה הם $(12\,,0)$.

שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ מוצגים בסרטוט.

a הוא פרמטר גדול מ־1.



נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

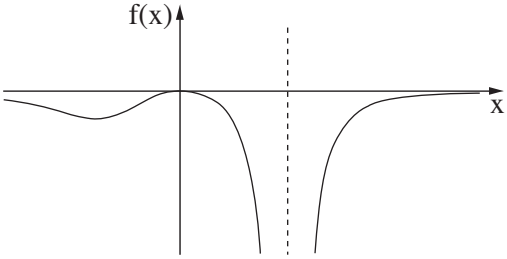
(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתון כי לישר $y=\frac{a}{27}$ ולגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק 3 נקודות משותפות.

(3) מצאו את הערך של a.

(המשך בעמוד 3)

ד. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{-30x^2}{(x^3-8)^2}$,
המוגדרת בתחום $x \neq 2$.



בסרטוט מוצגות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך
עם ציר ה־ x של גרף הפונקציה $f(x)$.

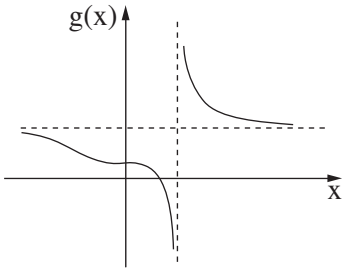
$g(x)$ היא פונקצייה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x)=f(x)$.

הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 2$.

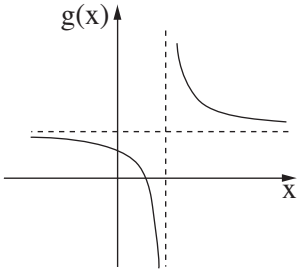
נתון כי גרף הפונקצייה $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(0\ ,\ 0.75)$.

(1) מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

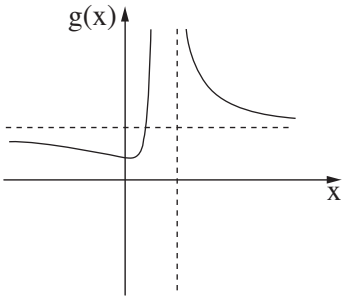
(2) אחד מן הגרפים $\mathrm{I-IV}$ שלפניכם מתאר פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.
קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



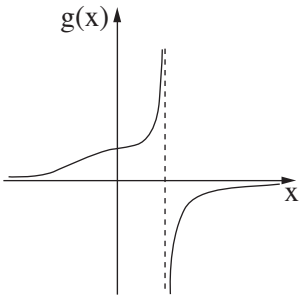
I



II



III



IV

(המשך בעמוד 4)

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא q .

b_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא $2q$.

c_n היא סדרה אין־סופית שאיבריה מקיימים $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.

א. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו באמצעות q את מנתה.

נתון: $a_1 = b_1$, $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$.

ב. מצאו את הערך של q .

ג. **(1)** האם הערך של a_1 הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

(2) האם הסדרה c_n עולה או יורדת? נמקו את תשובתכם.

נסמן ב־ S_1 את סכום הסדרה a_n , ב־ S_2 את סכום הסדרה b_n וב־ S_3 את סכום הסדרה c_n .

נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

ד. מצאו את הערך של a_1 .

3. בשק א' ובשק ב' יש כדורים משני סוגים: כדורים רכים וכדורים קשים.

בשק א' יש 10 כדורים, מתוכם 4 כדורים רכים והשאר קשים.

בשק ב' יש 12 כדורים, מתוכם x כדורים רכים והשאר קשים.

גלית בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).

נתון כי ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא $\frac{41}{200}$.

א. מצאו את הערך של x .

ב. ידוע שגלית הוציאה שני כדורים מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני כדורים מִשק א'?

גלית מבצעת את התהליך המתואר לפניכם 4 פעמים:

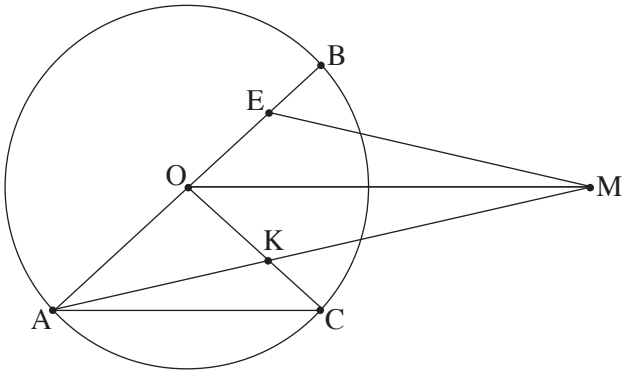
היא בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).

ג. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בדיוק בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים?

ד. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים ובשתיים מן הפעמים רק כדורים רכים?

(המשך בעמוד 5)

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O .

AB הוא קוטר במעגל.

הנקודה C נמצאת על המעגל.

הנקודה M נמצאת מחוץ למעגל

כך שהקטע AM חותך את הקטע CO בנקודה K .

הנקודה E נמצאת על הקטע BO כך שהמרובע $EMKO$

הוא דלתון ($MK = ME$, $OK = OE$).

א. הוכיחו כי $BC \parallel EK$.

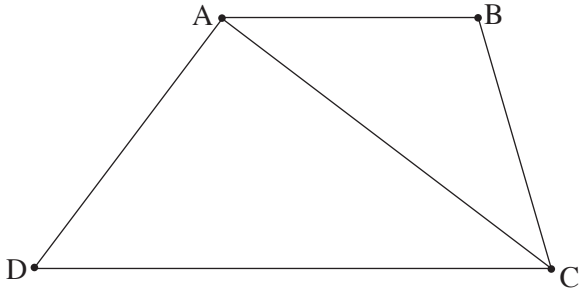
ב. הוכיחו כי $OM \parallel AC$.

נתון: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$.

ג. מצאו את הערך של $\frac{OM}{AC}$.

נסמן ב־ S את שטח הדלתון $EMKO$.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AOC .



5. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$).

נתון כי אורך הבסיס AB שווה לאורך הצלע BC .

נסמן: $AB = BC = k$, $\sphericalangle ACB = \alpha$, $0^o < \alpha < 90^o$.

א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos\alpha$.

נתון: $AD = 1.2k$, $DC = 2k$.

ב. מצאו את הערך של α .

ג. מצאו את גודל הזווית ADC .

המשכי הצלעות DA ו־ CB נחתכים בנקודה E .

נתון כי האורך של רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש EDC הוא 14 .

ד. מצאו את הערך של k .

(המשך בעמוד 6)

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{ax}{(x-3)^2}$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(x)+0.5$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

נתון כי לגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה־ x .

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.

נתונה הפונקצייה $h(x)=g(x)\cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

ד. **(1)** רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $h(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $-9\le x\le 0$.

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(1+\cos x)\cdot(-1+b\cos x)$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

b הוא פרמטר.

נתון: $0<b<1$.

א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b=\frac{1}{2}$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ה.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

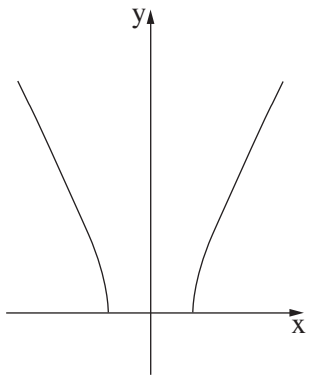
(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=f(x)+|f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקצייה $h(x)$.

ה. האם שיעור ה־ y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.

(המשך בעמוד 7)



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

נתון הישר $y = 3x - 3$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.

דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר המקביל לציר ה־ y וחותך את הישר הנתון בנקודה B .

ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את הישר הנתון בנקודה C .

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A .

ג. **(1)** הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB .

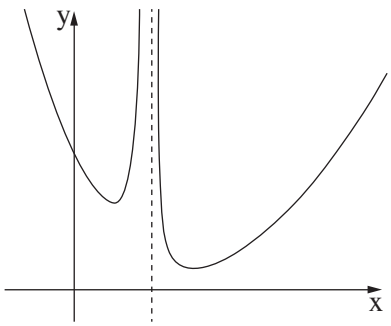
(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC .

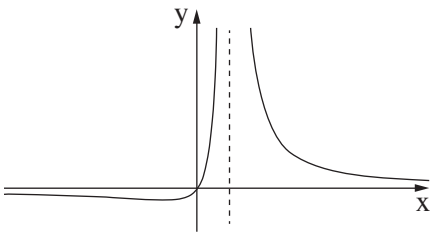
ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו־ AC הוא מקסימלי.

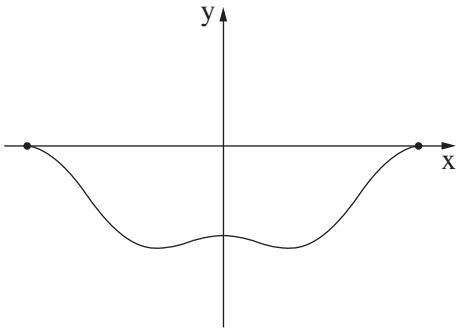
בהצלחה
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35571, גרסה א, קיץ תשפ"ו, 2026

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	הוכחה
ב.	I . לא נכונה II . נכונה
ג. (1)	$x \neq 12$
(2)	
(3)	$a = 3$
ד. (1)	$g(x) = \frac{10}{x^3 - 8} + 2$
(2)	I
.2	
א.	הוכחה המנה $2q^2$
ב.	$q = \frac{1}{4}$
ג. (1)	שלילי
(2)	יורדת
ד.	$a_1 = -21$
.3	
א.	$x = 6$
ב.	$\frac{26}{51}$
ג.	$\frac{215,680,323}{800,000,000} \approx 0.27$
ד.	$\frac{18,765,003}{800,000,000} \approx 0.023$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	$\frac{OM}{AC} = \frac{3}{2}$
ד.	$\frac{5}{9} \cdot S$
.5	
א.	להראות
ב.	$\alpha = 36.87^o$
ג.	$ADC = 53.13^o$
ד.	$k = \frac{70}{3}$
.6	
א. (1)	$x = 3$ $y = 0$
(2)	$\min\left(-3, -\frac{a}{12}\right)$
ב.	
ג.	$a = 6$
ד. (1)	תחום חיוביות: $-3 < x < 3$ תחומי שליליות: $x > 3$, $x < -3$
(2)	$\frac{17}{128}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.	זוגית
ב.	$(\pm\pi\,,0)$
ג.	$b=\frac{1}{2}$
ד. (1)	$\max(0\,,-1)$
	$\min\left(\pm\frac{\pi}{3}\,,-\frac{9}{8}\right)$
	$\max\,(\pm\pi\,,0)$
(2)	
ה.	אפס
.8	
א.	$x\le-1\ ,\ x\ge1$
ב.	$(1\,,0)$
	$(2.6\,,4.8)$
ג. (1)	$AB=2\sqrt{t^2-1}-3t+3$
(2)	$AC=\frac{2\sqrt{t^2-1}}{3}-t+1$
ד.	$t_{max}=\sqrt{1.8}$

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: חורף תשפ"ו, 2026
מספר השאלון: 35571
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תוכנית חדשה

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וארבעים וחמש דקות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1–8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

דרך הנקודות A ו־E שעל המעגל העבירו שני משיקים המאונכים זה לזה.

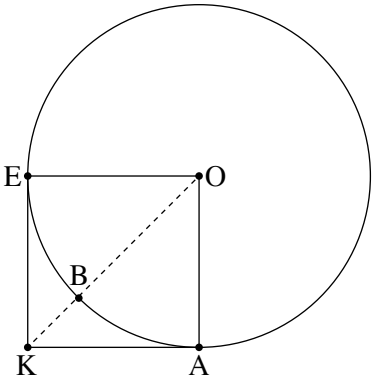
המשיקים נחתכים בנקודה K.

הקטע KO חותך את המעגל בנקודה B.

(1) מצאו פי כמה גדול שטח המשולש AOB משטח המשולש AKB.

נתון כי שטח המשולש AOB הוא 16.

(2) מצאו את אורך הגובה לצלע AK במשולש AKB.



ב. בתחרות שחמט, שני שחקנים – יאיר ונדב – מתחרים זה נגד זה.

כל משחק יכול להסתיים באחת מ־3 התוצאות האלה: ניצחון של יאיר, ניצחון של נדב או תיקו.

בכל משחק ההסתברות שיאיר ינצח היא קבועה וגדולה פי 2 מן ההסתברות שנדב ינצח.

נסמן ב־ p את ההסתברות שנדב ינצח במשחק אחד.

יאיר ונדב משחקים שני משחקים.

(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות שאחד מן השחקנים ישיג שני ניצחונות.

ידוע שאם שום שחקן לא השיג שני ניצחונות, ההסתברות שכל אחד מן המשחקים יסתיים בתיקו היא $\frac{9}{31}$.

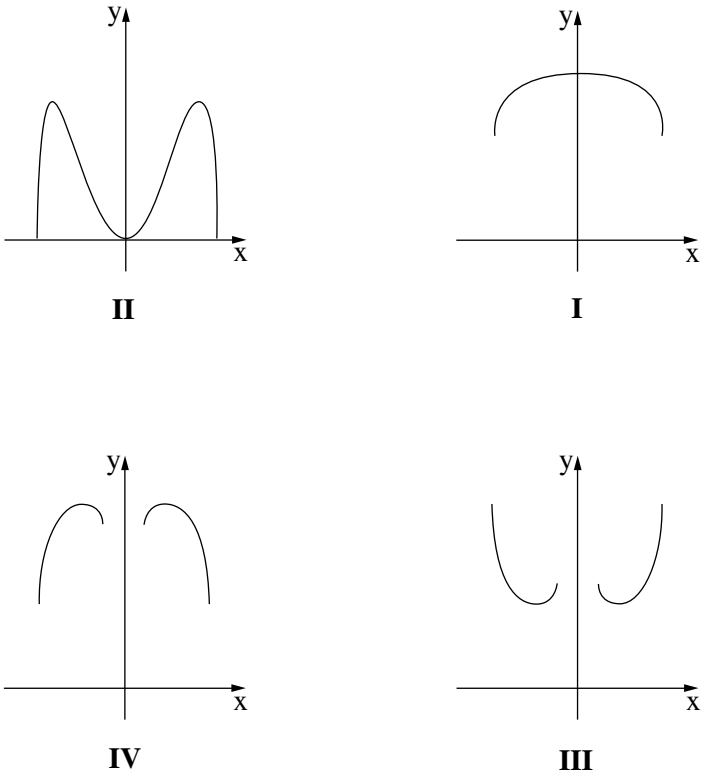
(2) קבעו איזו מן האפשרויות I–III שלפניכם מתאימה לערך של p. נמקו את קביעתכם.

I. $\frac{1}{10}$ **II.** $\frac{11}{27}$ **III.** $\frac{1}{6}$

ג. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{16-x^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) אחד מן הגרפים IV–I שלפניכם מתאר את הפונקצייה $f(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו את קביעתכם.



ד. נתונה סדרה אין־סופית שאיבריה מקיימים $a_n=\frac{\cos(\pi\cdot 2^n)}{5\cdot 2^n}$ לכל n טבעי.

(1) מצאו את שלושת האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(2) הוכיחו כי הסדרה a_n היא הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

(3) מצאו את סכום הסדרה a_n .

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שסכומה מתכנס.

המנה של הסדרה היא q.

נסמן ב־ T את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה,

ונסמן ב־ R את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה.

נתון: $\frac{T^2}{R^2}=16$.

א. מצאו את הערך של q.

נתונה סדרה b_n שאיבריה מקיימים $b_n=\frac{1+q}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

נתון: $b_1=1$.

ב. מצאו את הערך של a_1.

ג. הביעו באמצעות n את b_n.

ד. הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$b_1+b_2+...+b_n=\frac{16^n-1}{15}.$$

3. בשכבה י"א של תיכון עירוני גדול חלק מן התלמידים הם מדריכים בתנועת נוער והשאר אינם מדריכים.

בשכבה זו לחלק מן התלמידים יש רישיון נהיגה ולשאר אין רישיון נהיגה.

חצי מן התלמידים שיש להם רישיון נהיגה הם מדריכים בתנועת נוער.

אחוז התלמידים המדריכים מבין התלמידים שיש להם רישיון שווה לאחוז התלמידים שאין להם רישיון מבין התלמידים המדריכים.

בוחרים באקראי תלמיד מבין תלמידי השכבה.

ההסתברות שהתלמיד שנבחר הוא מדריך או שיש לו רישיון היא 0.45.

א. מצאו כמה אחוזים מן התלמידים בשכבה זו הם מדריכים.

ב. בוחרים באקראי תלמיד מבין התלמידים שאין להם רישיון.

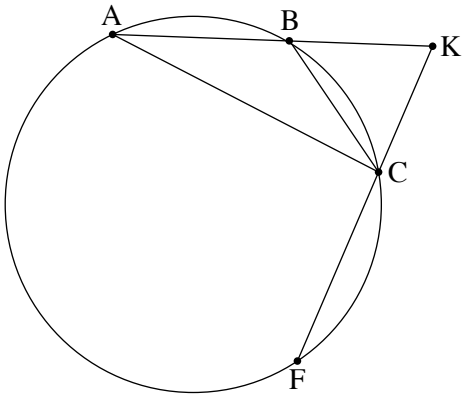
מהי ההסתברות שתלמיד זה הוא מדריך?

בוחרים באקראי 5 תלמידים מבין התלמידים שאין להם רישיון.

ג. **(1)** מהי ההסתברות שנבחר יותר ממדריך אחד?

(2) ידוע שנבחר יותר ממדריך אחד. מהי ההסתברות כי מספר המדריכים שנבחרו הוא זוגי?

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. בסרטוט שלפניכם משולש קהה זווית ABC החסום במעגל.
הנקודה K נמצאת על המשך הצלע AB כך ש־ $AB = BK$.
המשך הקטע KC חותך את המעגל בנקודה נוספת, בנקודה F .
נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$.

א. הוכיחו כי AF הוא קוטר במעגל.

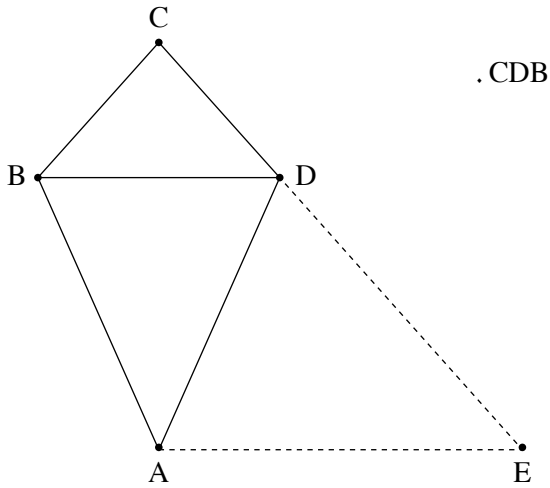
המיתרים BF ו־ AC נחתכים בנקודה D .

ב. הוכיחו כי המשולש ADK הוא שווה שוקיים.

ג. **(1)** הוכיחו כי המרובע $BDCK$ הוא בר חסימה במעגל.

(2) הוכיחו כי $\sphericalangle DKC = \sphericalangle FAC$.

ד. הוכיחו כי $AC \cdot AD = KC \cdot AF$.



5. בסרטוט שלפניכם דלתון $ABCD$ $(AB = AD\ ,\ CB = CD)$.
נתון: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = 2\alpha$, $0^o < \alpha < 45^o$.
נסמן: $AB = k$.

א. הביעו באמצעות k ו־ α את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB .

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD גדול פי $\frac{4}{3}$
מרדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB .

ב. מצאו את גודל הזווית BAD .

הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD .
דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל ל־ BD וחותך את
המשך הצלע CD בנקודה E .
נתון כי שטח המשולש AOE הוא 70 .

ג. מצאו את הערך של k .

/המשך בעמוד 6/

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{\sqrt{5x^2-kx}}{x^3}$, k הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)=-f(x)$.

שיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $h(x)$ הוא 1.6 .

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו $k=8$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ו.

ג. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=(f(x))^2$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 2 .

ה. האם ערך הביטוי $\int_a^{a+1} g(x)\,dx$ שווה, גדול או קטן בהשוואה לערך הביטוי $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$? נמקו את תשובתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=2$ ו־ $x=6$.

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(\sin x)^2+\cos x-1$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{f(x)+b}$, b הוא פרמטר.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק שתי אסימפטוטות אנכיות.

ד. כתבו שני ערכים אפשריים של b , שאחד מהם חיובי והאחר שלילי.

הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך השלילי של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ה–ו.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

/המשך בעמוד 7/

8. נתונה הפונקצייה $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 8kx$, המוגדרת לכל x .

k הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

הנקודה A היא נקודת הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A .

נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ב. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k .

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה־ x החותך אותו בנקודה B , ואנך לציר ה־ y החותך אותו בנקודה C .

נתון ריבוע I שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AB , וריבוע II שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AC .

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו סכום שטחי הריבועים I ו־ II הוא מינימלי (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

דגשים בנוגע לפרסום הצעה לפתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

1. בהצעה לפתרון שאלוני בחינת הבגרות במתמטיקה **מובאת התוצאה הסופית בלבד**, בלי פירוט דרכי הפתרון או בלי הסבר לפתרון.

2. אם יתברר שנפלה טעות בהצעת הפתרון, תפורסם בתוך זמן סביר הצעה מתוקנת, והצעת הפתרון המתוקנת תהיה המחייבת. **טל"ח** (טעות לעולם חוזר) — בהצעת הפתרון עלולות ליפול טעויות, ואין בה כדי לחייב את מעריכי הבחינה לקבל תשובה שגויה.

3. על פי חוזר מנכ"ל טוהר הבחינות — תשע"ה/9ד, נבחנים בבחינת בגרות מחויבים לפעול על פי נוהלי טוהר הבחינות כדי להבטיח הליך בחינות אמין, הוגן ושוויוני.

הנבחנים נדרשים לכתוב במחברת הבחינה פתרון מלא, מפורט ומנומק.

אם נבחן יכתוב תשובות סופיות נכונות במחברת הבחינה בלי פירוט של שלבי הפתרון או בלי הסבר מפורט או אם יתעורר חשד שנבחן הפר את טוהר הבחינות, יחל הליך של החשדת הבחינה כמפורט בחוזר.

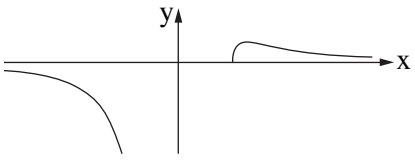
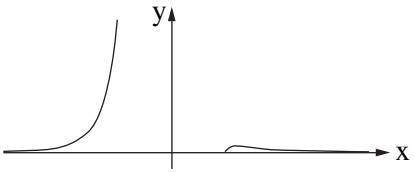
קישור לחוזר המנכ"ל

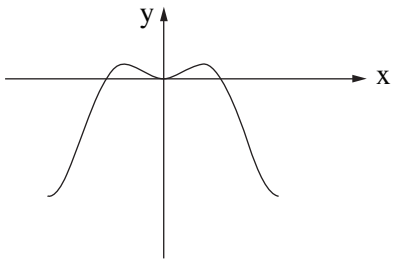
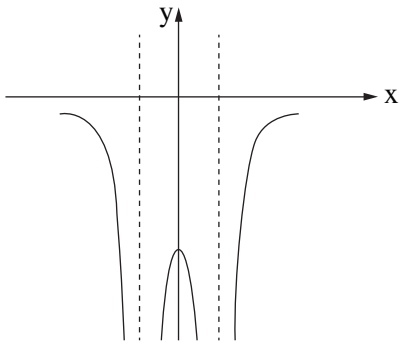
בהצלחה לנבחנים ולנבחנות!

משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35571, גרסה א, חורף תשפ"ו, 2026

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א. (1)	פי $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$
(2)	~ 1.97
ב. (1)	$5p^2$
(2)	III
ג. (1)	$-4 \le x \le -1$ $1 \le x \le 4$
(2)	IV
ד. (1)	$a_1 = \frac{1}{10}$ $a_2 = \frac{1}{20}$ $a_3 = \frac{1}{40}$
(2)	הוכחה המנה 0.5
(3)	$\frac{1}{5}$
.2	
א.	$q = 0.25$
ב.	$a_1 = \sqrt{5}$
ג.	$b_n = 16^{n-1}$
ד.	הוכחה
.3	
א.	30%
ב.	$\frac{3}{14}$
ג. (1)	$\frac{78,579}{268,912} \approx 0.292$
(2)	$\frac{13,805}{17,462} \approx 0.791$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה
ד.	הוכחה
.5	
א.	$\frac{k \cdot \sin(\alpha)}{\sin(4\alpha)}$
ב.	48.19^{o}
ג.	$k \approx 14.446$
.6	
א.	$x < 0\,,\ x \ge \frac{k}{5}$
ב.	$k = 8$
ג. (1)	$x = 0, y = 0$
(2)	$\min(1.6, 0)$ $\max(2, \frac{1}{4})$
(3)	
ד.	
ה.	קטן
ו.	$\frac{25}{324} \approx 0.077$

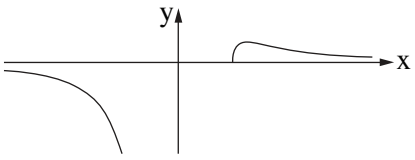
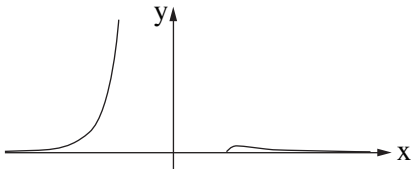
מספר השאלה	התשובה הנכונה
7.	
א.	הוכחה
ב. (1)	$(0, 0)$
	$(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$
(2)	$\min(0, 0)$
	$\max(\pm \frac{\pi}{3}, 0.25)$
	$\min(\pm \pi, -2)$
ג.	
ד.	ערך חיובי: כל b המקיים $0 < b \le 2$
	ערך שלילי: $b = -0.25$
ה. (1)	$-\pi \le x < -\frac{\pi}{3}$
	$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$
	$\frac{\pi}{3} < x \le \pi$
(2)	$\max(0, -4)$
	$\max(\pm \pi, -\frac{4}{9})$
ו.	

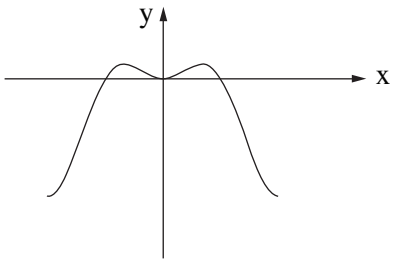
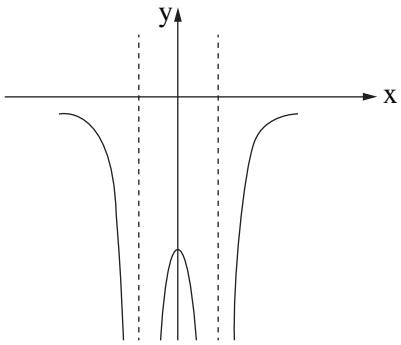
מספר השאלה	התשובה הנכונה
8.	
א.	$A(\frac{1}{k}, 8 - \frac{2}{k^2})$
ב.	$k > \frac{1}{2}$
ג.	$k = \sqrt{\frac{8}{31}}$

משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35571, גרסה ב, חורף תשפ"ו, 2026

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א. (1)	פי $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$
(2)	~ 2.46
ב. (1)	$5p^2$
(2)	III
ג. (1)	$-8 \le x \le -2$ $2 \le x \le 8$
(2)	IV
ד. (1)	$a_1 = \frac{1}{6}$ $a_2 = \frac{1}{12}$ $a_3 = \frac{1}{24}$
(2)	הוכחה המנה 0.5
(3)	$\frac{1}{3}$
.2	
א.	$q = 0.2$
ב.	$a_1 = \sqrt{6}$
ג.	$b_n = 25^{n-1}$
ד.	הוכחה
.3	
א.	24%
ב.	$\frac{3}{19}$
ג. (1)	$\frac{444,483}{2,476,099} \approx 0.18$
(2)	$\frac{41,680}{49,387} \approx 0.844$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה
ד.	הוכחה
.5	
א.	$\frac{k \cdot \sin(\alpha)}{\sin(4\alpha)}$
ב.	48.19^o
ג.	$k \approx 12.688$
.6	
א.	$x < 0\,,\ x \ge \frac{k}{5}$
ב.	$k = 12$
ג. (1)	$x = 0, y = 0$
(2)	$\min(2.4, 0)$ $\max(3, \frac{1}{9})$
(3)	
ד.	
ה.	קטן
ו.	$\frac{25}{1,296} \approx 0.019$

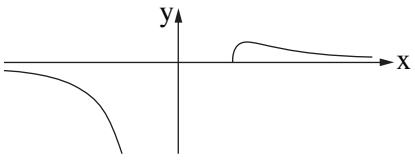
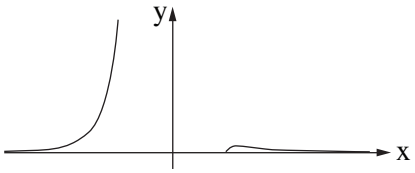
מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.	הוכחה
ב. (1)	$(0, 0)$
	$(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$
(2)	$\min(0, 0)$
	$\max(\pm \frac{\pi}{3}, 0.25)$
	$\min(\pm \pi, -2)$
ג.	
ד.	ערך חיובי: כל b המקיים $0 < b \leq 2$
	ערך שלילי: $b = -0.25$
ה. (1)	$-\pi \leq x < -\frac{\pi}{3}$
	$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$
	$\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$
(2)	$\max(0, -4)$
	$\max(\pm \pi, -\frac{4}{9})$
ו.	

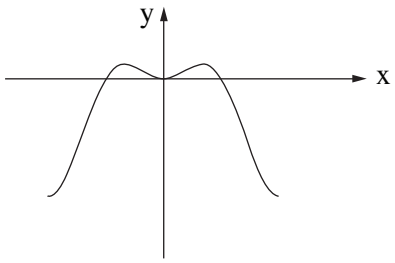
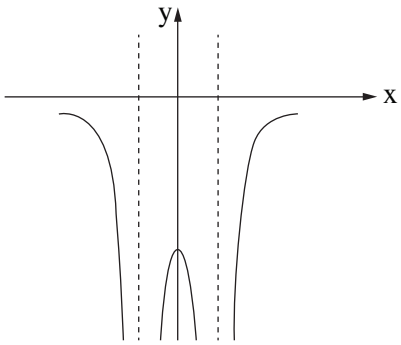
מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א.	$A(\frac{1}{k}, 0.5 - \frac{2}{k^2})$
ב.	$k > 2$
ג.	$k = \sqrt{8}$

משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35571, גרסה ג, חורף תשפ"ו, 2026

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א. (1)	פי $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$
(2)	~ 1.48
ב. (1)	$5p^2$
(2)	III
ג. (1)	$-12 \le x \le -3$ $3 \le x \le 12$
(2)	IV
ד. (1)	$a_1 = \frac{1}{20}$ $a_2 = \frac{1}{40}$ $a_3 = \frac{1}{80}$
(2)	הוכחה המנה 0.5
(3)	$\frac{1}{10}$
.2	
א.	$q = \frac{1}{6}$
ב.	$a_1 = \sqrt{7}$
ג.	$b_n = 36^{n-1}$
ד.	הוכחה
.3	
א.	28%
ב.	$\frac{7}{36}$
ג. (1)	$\frac{237,503}{944,787} \approx 0.251$
(2)	$\frac{1,756,965}{2,171,456} \approx 0.809$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה
ד.	הוכחה
.5	
א.	$\frac{k \cdot \sin(\alpha)}{\sin(4\alpha)}$
ב.	48.19^{o}
ג.	$k \approx 10.644$
.6	
א.	$x < 0\,,\ x \ge \frac{k}{5}$
ב.	$k = 16$
ג. (1)	$x = 0, y = 0$
(2)	$\min(3.2, 0)$ $\max(4, \frac{1}{16})$
(3)	
ד.	
ה.	קטן
ו.	$\frac{5}{864} \approx 0.0058$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.	הוכחה
ב. (1)	$(0, 0)$
	$(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$
(2)	$\min(0, 0)$
	$\max(\pm \frac{\pi}{3}, 0.25)$
	$\min(\pm \pi, -2)$
ג.	
ד.	ערך חיובי: כל b המקיים $0 < b \le 2$
	ערך שלילי: $b = -0.25$
ה. (1)	$-\pi \le x < -\frac{\pi}{3}$
	$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$
	$\frac{\pi}{3} < x \le \pi$
(2)	$\max(0, -4)$
	$\max(\pm \pi, -\frac{4}{9})$
ו.	

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א.	$A(\frac{1}{k}, 2 - \frac{2}{k^2})$
ב.	$k > 1$
ג.	$k = \sqrt{\frac{8}{7}}$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תשפ"ה, 2025, **מועד ב**
מספר השאלון: 35581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – 5×20 = 100 נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. האורך של מסילת הרכבת בין חדרה לבאר שבע הוא 150 ק"מ.

רכבת א' יצאה מחדרה לבאר שבע ונסעה במהירות קבועה.

רבע שעה לאחר מכן יצאה רכבת ב' מבאר שבע לחדרה, וגם היא נסעה במהירות קבועה.

שתי הרכבות חלפו זו על פני זו, והגיעו ליעדים שלהן באותה השעה.

ידוע כי רבע שעה לאחר שרכבת ב' יצאה לדרכה, לפני שהרכבות חלפו זו על פני זו, המרחק ביניהן היה 70 ק"מ.

א. מצאו את מהירות הנסיעה של רכבת א' ואת מהירות הנסיעה של רכבת ב'.

ב. מצאו כמה זמן לאחר יציאתה של רכבת א', המרחק בין הרכבות היה 70 ק"מ פעם נוספת.

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא q.

$0 < q < 1$.

א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.

b_n היא סדרה הנדסית אין־סופית וגם מנתה היא q.

c_n היא סדרה אין־סופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$ $(c_n \neq 0)$.

ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

נתון כי $c_1 = 5\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 17 מסכום איברי הסדרה b_n.

ג. מצאו את הערך של a_1.

נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב־ 4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה a_n.

ד. מצאו את הערך של q.

/המשך בעמוד 3/

3. בבית אריזה גדול אורזים שני סוגי פירות בלבד: לימונים ותפוזים.

חלק מן הפירות מיועדים לייצוא והשאר אינם מיועדים לייצוא.

ההסתברות לבחור באקראי שני תפוזים מבין כל הפירות בבית האריזה היא 0.4096 .

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

א. מהי ההסתברות שנבחר לימון?

ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$.

ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{4}{15}$.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?

בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.

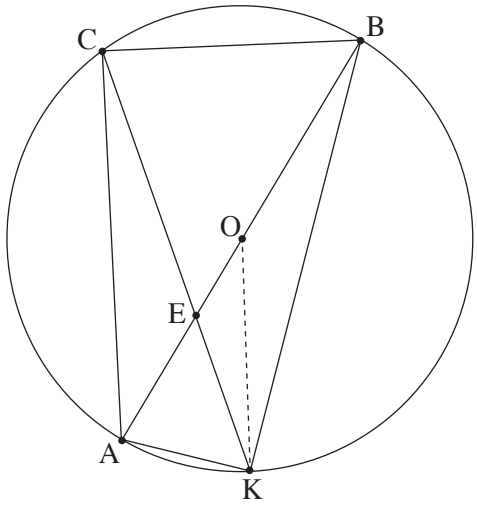
ג. ידוע שנבחרו שני לימונים. מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר <u>אינו</u> מיועד לייצוא?

בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.

המיתר CK חותך את הרדיוס AO בנקודה E (ראו סרטוט).

נתון: $\sphericalangle EKO = \sphericalangle ABK$.

א. הוכיחו כי $\Delta ACE \sim \Delta OKE$.

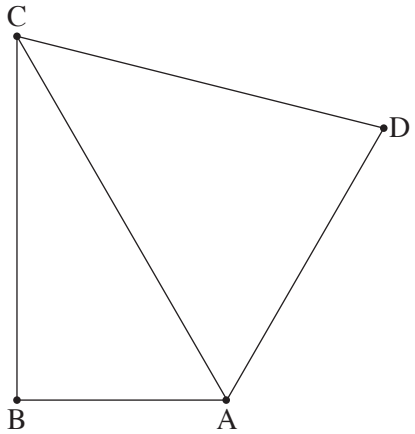
המשך הקטע KO חותך את המיתר CB בנקודה P.

נתון כי $PO = 4$, וכי רדיוס המעגל הוא 4.8.

ב. **(1)** הוכיחו כי PO הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

(2) מצאו את אורך הקטע EO.

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ACE ובין שטח המשולש AOK.



5. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ABC = 90^o$).

על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש־AC הוא חוצה זווית BAD.

נסמן: $AB = k$, $\sphericalangle CAB = \alpha$.

א. הביעו באמצעות k ו־α את האורך של AC.

נתון: $AD = 1.5 \cdot k$, $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$.

ב. חשבו את הערך של α.

הציבו $\alpha = 60^o$ וענו על סעיפים ג–ד.

הנקודה M היא מרכז המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC.

ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.

הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

נתון: $ME = 6$.

ד. חשבו את הערך של k.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2ax}{(x^2-16)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x)=f(x)+1$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-2$.

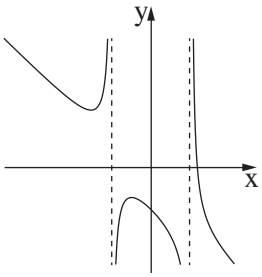
ב. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקצייה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג–ד.

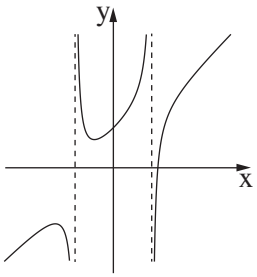
נתון כי הפונקצייה $g(x)$ עוברת בנקודה $(2\,,7)$.

ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקצייה $g(x)$.

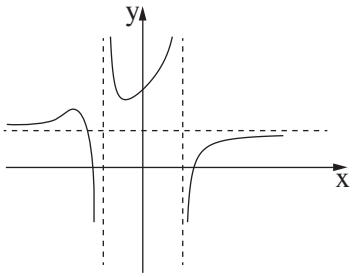
ד. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.



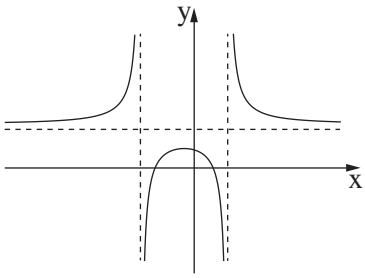
I



II



III



IV

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos x}$, בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה־ x של הפונקצייה $f(x)$.

ב. קבעו אם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית. נמקו את קביעתכם.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

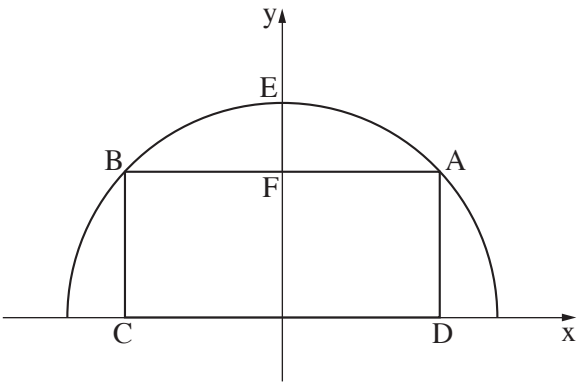
נתונה הפונקצייה $g(x) = 2\cos x + \frac{2\sin x}{\sin(2x)}$, בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ה. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) הראו כי $g(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos x}$, בעבור כל x בתחום הגדרתה.

ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$ ב־ 3 נקודות בדיוק?
אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.

8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$,
R הוא פרמטר חיובי.
הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R \le x \le R$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון.
דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה־ x
וחותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה נוספת B .
הנקודות C ו־ D נמצאות על ציר ה־ x כך שנוצר מלבן $ABCD$.
הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה־ y .
הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ y .
נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF .
נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A .



א. **(1)** הביעו באמצעות R ו־ t את אורך הקטע EF .

(2) הביעו באמצעות R ו־ t את היקף המלבן $ABCD$.

ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן $ABCD$ לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

דגשים בנוגע לפרסום הצעה לפתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

1. בהצעה לפתרון שאלוני בחינת הבגרות במתמטיקה **מובאת התוצאה הסופית בלבד**, בלי פירוט דרכי הפתרון או בלי הסבר לפתרון.

2. אם יתברר שנפלה טעות בהצעת הפתרון, תפורסם בתוך זמן סביר הצעה מתוקנת, והצעת הפתרון המתוקנת תהיה המחייבת. **טל"ח** (טעות לעולם חוזר) — בהצעת הפתרון עלולות ליפול טעויות, ואין בה כדי לחייב את מעריכי הבחינה לקבל תשובה שגויה.

3. על פי חוזר מנכ"ל טוהר הבחינות — תשע"ה/9ד, נבחנים בבחינת בגרות מחויבים לפעול על פי נוהלי טוהר הבחינות כדי להבטיח הליך בחינות אמין, הוגן ושוויוני.

הנבחנים נדרשים לכתוב במחברת הבחינה פתרון מלא, מפורט ומנומק.

אם נבחן יכתוב תשובות סופיות נכונות במחברת הבחינה בלי פירוט של שלבי הפתרון או בלי הסבר מפורט או אם יתעורר חשד שנבחן הפר את טוהר הבחינות, יחל הליך של החשדת הבחינה כמפורט בחוזר.

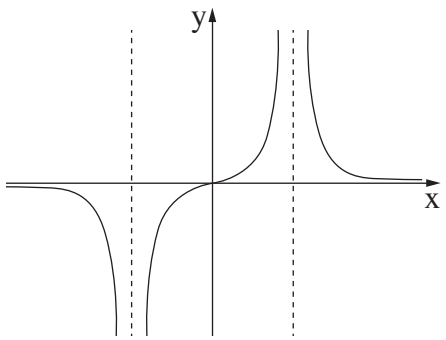
קישור לחוזר המנכ"ל

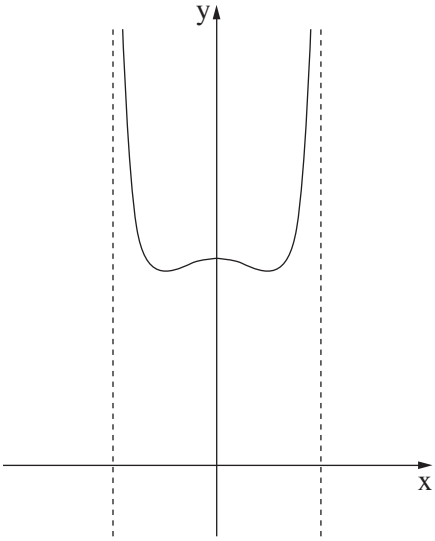
בהצלחה לנבחנים ולנבחנות!

משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35581, קיץ תשפ"ה, מועד ב, 2025

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	מהירות הנסיעה של רכבת א': 100 קמ"ש מהירות הנסיעה של רכבת ב': 120 קמ"ש
ב.	$1\frac{3}{22}$ שעות
.2	
א.	שליליים
ב.	הוכחה המנה היא q
ג.	$a_1 = -5$
ד.	$q = 0.25$
.3	
א.	0.36
ב.	0.7
ג.	$\frac{28}{81}$
ד.	$\frac{1,074}{1,417}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב. (1)	הוכחה
(2)	1.8
ג.	$\frac{25}{24}$
.5	
א.	$AC = \frac{k}{\cos(\alpha)}$
ב.	$\alpha = 60^o$
ג.	$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot k$
ד.	~ 11.59
.6	
א. (1)	$x \neq \pm 4$
(2)	$x = \pm 4$ $y = 0$
(3)	תחום עלייה: $-4 < x < 4$ תחומי ירידה: $x > 4$, $x < -4$
(4)	
ב.	$a = 36$
ג.	$g(x) = \frac{-36}{x^2-16} + x + 2$
ד.	גרף II

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א. (1)	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
(2)	$x = \pm\frac{\pi}{2}$
ב.	זוגית
ג.	$\min\left(-\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$
	$\max(0, 3)$
	$\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$
ד.	
ה. (1)	$-\frac{\pi}{2} < x < 0$
	$0 < x < \frac{\pi}{2}$
(2)	להראות
ו.	לא

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א. (1)	$EF = R - \sqrt{R^2 - t^2}$
(2)	$2\sqrt{R^2 - t^2} + 4t$
ב.	$\frac{2R}{\sqrt{13}}$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשפ"ה, 2025
מספר השאלון:	35581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – 5×20 = 100 נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

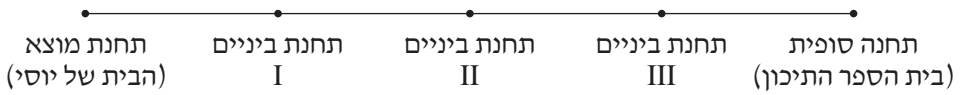
1. אורך הכביש שבין הבית של יוסי ובין בית הספר התיכון שהוא לומד בו הוא 8 ק"מ.

בכל יום יוצא אוטובוס, המשמש להסעת תלמידים, מתחנת המוצא שלו – הבית של יוסי, אל התחנה הסופית שלו – בית הספר.

בדרך לבית הספר האוטובוס עובר בשלוש תחנות ביניים ועוצר בכל אחת מהן למשך 4 דקות כדי לאסוף תלמידים.

האוטובוס נוסע במהירות קבועה של v קמ"ש בכל קטעי הכביש.

המרחק בין כל שתי תחנות סמוכות זהה, כמתואר בסרטוט.



ביום ראשון החליט יוסי לבוא לבית הספר ברכיבה על אופניים חשמליים. הוא יצא מביתו באותו הזמן שיצא האוטובוס מתחנת המוצא, ורכב במהירות קבועה. האוטובוס ויוסי הגיעו לבית הספר באותו הזמן.

א. הביעו את מהירות הרכיבה של יוסי באמצעות v .

ביום שני החליט יוסי לבוא לבית הספר בריצה. הוא יצא 19 דקות לפני שיצא האוטובוס מתחנת המוצא.

מהירות הרכיבה של יוסי ביום ראשון גדולה פי 2 ממהירות הריצה שלו ביום שני.

יוסי והאוטובוס הגיעו לתחנת ביניים III באותו הזמן.

ב. מצאו את הערך של v .

ג. קבעו באיזה מן המקרים (1)–(3) שלפניכם, יגיע יוסי לבית הספר בזמן הקצר ביותר. נמקו את קביעתכם.

(1) יוסי ייסע באוטובוס כל הדרך עד בית הספר.

(2) יוסי ייסע באוטובוס מתחנת המוצא עד תחנת ביניים II , ומשם ימשיך מייד ברכיבה על אופניים חשמליים עד לבית הספר באותה המהירות שבה רכב ביום ראשון.

(3) יוסי ירכב על אופניים חשמליים מביתו עד לבית הספר במהירות הגדולה ב־ 5 קמ"ש ממהירות הרכיבה שלו ביום ראשון.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

נתון: $2a_2 + 8 = a_4$, $\frac{a_4}{a_2} = 4$.

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אין־סופית חדשה B .

נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אין־סופית נוספת C .

איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \ldots, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_1 \cdot a_2}$. $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג. **(1)** מצאו את מנת הסדרה C .

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

נסמן ב־S_B את סכום הסדרה B , וב־S_C את סכום הסדרה C .

נתון: $S_C = 4 \cdot S_B$.

ד. מצאו את הערך של k .

3. במדינה גדולה התקיימו בחירות. המצביעים בבחירות אלה יכולים להצביע למפלגה א' או למפלגה ב' בלבד.

נסמן ב־P את ההסתברות שמצביע שנבחר באקראי הצביע למפלגה א' $(0 < P < 1)$.

בוחרים באקראי 3 מצביעים.

נתון כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם הצביע למפלגה א' גדולה פי 2 מן ההסתברות ששלושתם הצביעו למפלגה ב'.

א. מצאו את הערך של P .

בוחרים באקראי 4 מצביעים.

ב. ידוע כי ארבעתם הצביעו לאותה המפלגה. מהי ההסתברות שהם הצביעו למפלגה א'?

חלק מן המצביעים הם מבוגרים והשאר צעירים.

נתון כי 40% מן המצביעים המבוגרים הצביעו למפלגה ב' ו־15% מן המצביעים הצעירים הצביעו למפלגה א'.

ג. מהי ההסתברות לבחור באקראי מצביע צעיר אחד מבין כל המצביעים?

לאחר הבחירות נערך סקר טלפוני בקרב המצביעים. דני, אחד הסוקרים, התקשר באקראי למצביעים צעירים בלבד.

הוא התקשר אליהם בזה אחר זה והפסיק מייד לאחר שריאיין צעיר אחד שהצביע למפלגה אחת וצעיר נוסף שהצביע למפלגה האחרת.

ד. מהי ההסתברות שדני התקשר ל־5 צעירים בדיוק?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

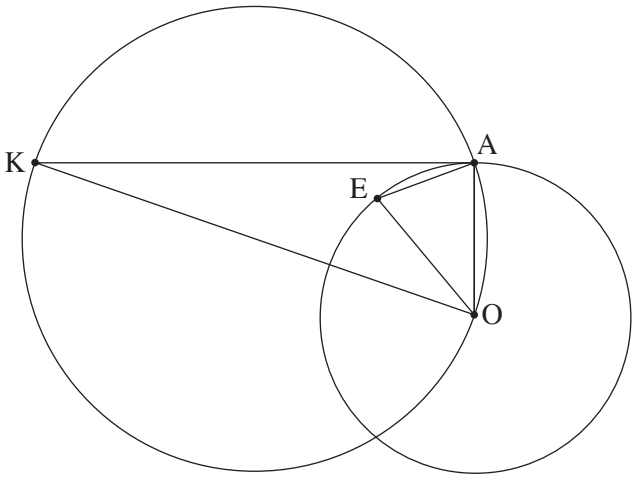
4. בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שרדיוסו R ומעגל קטן שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r.

הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול.

הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים, כמתואר בסרטוט.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל הקטן. המשיק חותך את המעגל הגדול בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על המעגל הקטן בתוך המשולש KAO.



א. הוכיחו כי $\sphericalangle AOE = 2\sphericalangle KAE$.

המשך הקטע AE חותך את הקטע OK בנקודה M.

נתון כי הנקודה M היא אמצע הקטע OK.

ב. הוכיחו כי הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול.

ג. הוכיחו כי $\Delta MOA \sim \Delta OEA$.

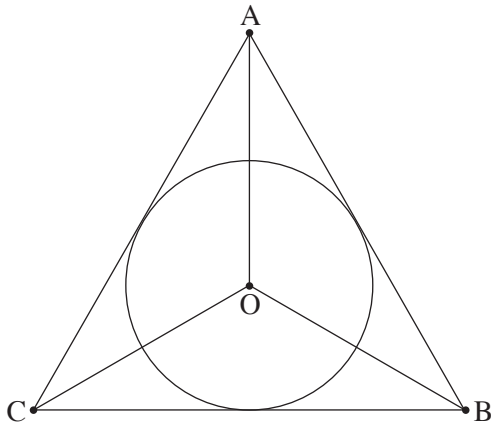
נתון: $R = 1.5r$.

נסמן ב־ S את שטח המשולש MEO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש OKA.

5. במשולש שווה שוקיים ABC $(AC = AB)$ חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle ACB = 2\alpha$.



א. **(1)** הביעו באמצעות r ו־ α את אורך הקטע CO.

(2) הביעו באמצעות r ו־ α את אורך הצלע AC.

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO.

ב. מצאו את הערך של α.

הציבו $\alpha = 30^{o}$ וענו על הסעיפים ג–ד.

המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K.

נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{175}$.

ג. מצאו את הערך של r.

הנקודה E נמצאת על הצלע CB.

נתון כי שטח המשולש CKE הוא 18.

ד. חשבו את אורך הקטע BE.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על הסעיפים א–ו. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי־זוגית.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

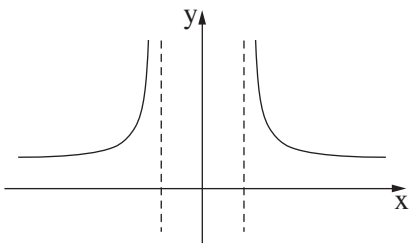
נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ה. **(1)** מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

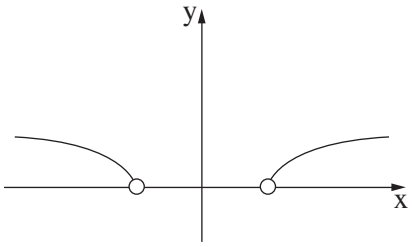
(2) קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=2a$ ו־ $x=3a$ הוא 7.5 .

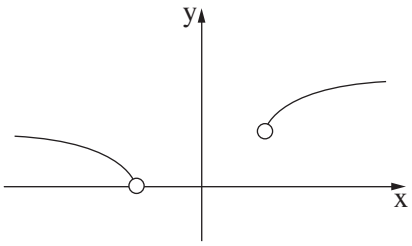
ו. מצאו את הערך של a .



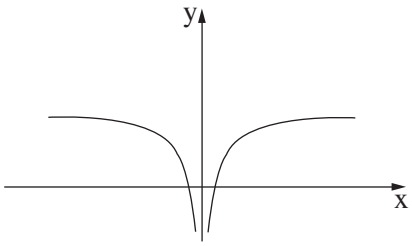
II



I

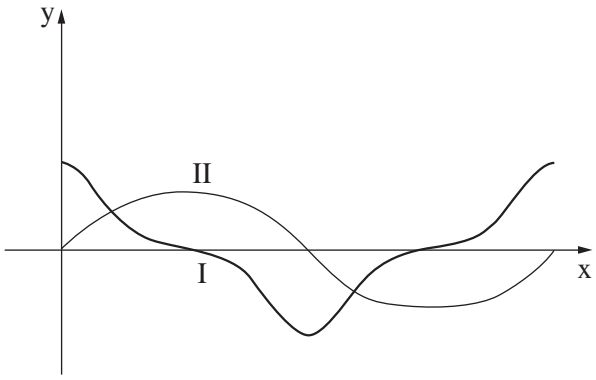


IV



III

/המשך בעמוד 6/



7. בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים, II–I , בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$,

ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.

א. קבעו איזה מן הגרפים II–I מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

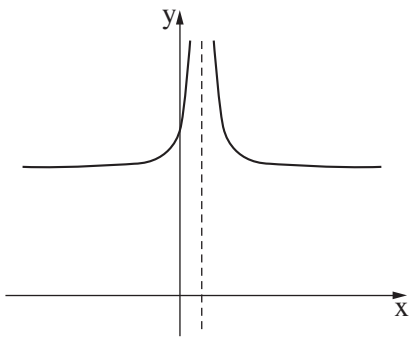
(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \left| f(x) - 0.4 \right|$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + 9$.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \ne 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, ושיעור ה־ x שלה הוא 2 .

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

המשיק חותך את ציר ה־ x בנקודה A ואת הישר $x = 1$ בנקודה B .

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1 , 0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB .

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

דגשים בנוגע לפרסום הצעה לפתרון בחינת הבגרות במתמטיקה

1. בהצעה לפתרון שאלוני בחינת הבגרות במתמטיקה **מובאת התוצאה הסופית בלבד**, בלי פירוט דרכי הפתרון או בלי הסבר לפתרון.

2. אם יתברר שנפלה טעות בהצעת הפתרון, תפורסם בתוך זמן סביר הצעה מתוקנת, והצעת הפתרון המתוקנת תהיה המחייבת. **טל"ח** (טעות לעולם חוזר) — בהצעת הפתרון עלולות ליפול טעויות, ואין בה כדי לחייב את מעריכי הבחינה לקבל תשובה שגויה.

3. על פי חוזר מנכ"ל טוהר הבחינות — תשע"ה/9ד, נבחנים בבחינת בגרות מחויבים לפעול על פי נוהלי טוהר הבחינות כדי להבטיח הליך בחינות אמין, הוגן ושוויוני.

הנבחנים נדרשים לכתוב במחברת הבחינה פתרון מלא, מפורט ומנומק.

אם נבחן יכתוב תשובות סופיות נכונות במחברת הבחינה בלי פירוט של שלבי הפתרון או בלי הסבר מפורט או אם יתעורר חשד שנבחן הפר את טוהר הבחינות, יחל הליך של החשדת הבחינה כמפורט בחוזר.

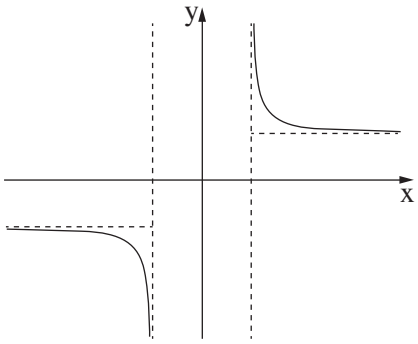
קישור לחוזר המנכ"ל

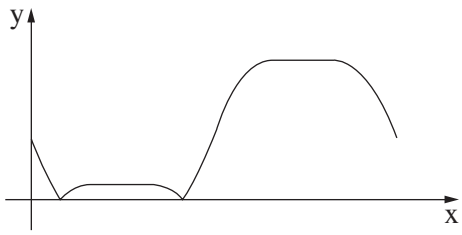
בהצלחה לנבחנים ולנבחנות!

משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35581, קיץ תשפ"ה, 2025

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	$\frac{40v}{40+v}$
ב.	40 קמ"ש
ג.	(3)
.2	
א.	$a_3 = \pm 8$
ב.	הוכחה
ג. (1)	המנה $\frac{1}{4}$
(2)	$\frac{1}{16}$
ד.	$k > 0$
	$k = 5$
.3	
א.	$P = \frac{2}{5}$
ב.	$\frac{16}{97}$
ג.	$\frac{4}{9}$
ד.	$\frac{12,597}{160,000} \approx 0.0787$
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	הוכחה
ד.	$3.6 \cdot S$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א. (1)	$CO = \frac{r}{\sin(\alpha)}$
(2)	$AC = \frac{r \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) \cdot \cos(2\alpha)}$
ב.	$\alpha = 30^o$
ג.	$r = 5$
ד.	$BE = 10\sqrt{3} - 14.4$
.6	
א. (1)	$x < -a \ , \ x > a$
(2)	$x = \pm a$
	$y = 1 \ (x \to \infty)$
	$y = -1 \ (x \to -\infty)$
ב.	הוכחה
ג.	תחומי ירידה: $x < -a \ , \ x > a$
ד.	
ה. (1)	תחום ירידה: $x < -a$
	תחום עלייה: $x > a$
(2)	גרף I
ו.	$a = 9$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.	גרף II
ב. (1)	$(0\,,0)$
	$(\pi\,,0)$
	$(2\pi\,,0)$
(2)	$\min(0\,,0)$
	$\max\left(\frac{\pi}{2}\,,\frac{1}{2}\right)$
	$\min\left(\frac{3\pi}{2}\,,-\frac{1}{2}\right)$
	$\max(2\pi\,,0)$
ג.	$\left(\frac{\pi}{6}\,,0\right)$
	$\left(\frac{5\pi}{6}\,,0\right)$
ד. (1)	
(2)	$\max(0\,,0.4)$
	$\min\left(\frac{\pi}{6}\,,0\right)$
	$\max\left(\frac{\pi}{2}\,,0.1\right)$
	$\min\left(\frac{5\pi}{6}\,,0\right)$
	$\max\left(\frac{3\pi}{2}\,,0.9\right)$
	$\min(2\pi\,,0.4)$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א.	$x=1\ ,\ y=9$
ב.	$y=-2ax+5a+9$
ג.	$\frac{9(a+3)^2}{4a}$
ד.	$a=3$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	חורף תשפ"ה, 2025
מספר השאלון:	35581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – 5×20 = 100 נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

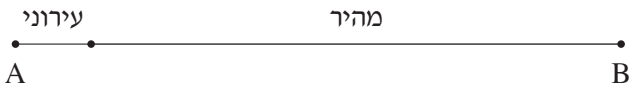
השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. קטע הכביש שבין יישוב A ליישוב B מחולק לשניים: קטע כביש עירוני וקטע כביש מהיר, כמתואר בסרטוט.
האורך של קטע הכביש המהיר גדול פי 7 מן האורך של קטע הכביש העירוני.



שתי מכוניות א', ב' יצאו באותה השעה, ונסעו זו לקראת זו: מכונית א' יצאה מיישוב A ומכונית ב' יצאה מיישוב B .
במשך כל אותו היום מהירות הנסיעה של כל אחת מן המכוניות בקטע הכביש המהיר הייתה קבועה וגדולה פי 2 ממהירות הנסיעה שלה בקטע הכביש העירוני. המכוניות נפגשו באמצע הקטע AB .

א. מצאו פי כמה גדולה מהירות הנסיעה של מכונית א' בקטע הכביש המהיר ממהירות הנסיעה של מכונית ב' בקטע הכביש המהיר.

כאשר הגיעה מכונית א' ליישוב B , הייתה מכונית ב' בקטע הכביש העירוני, במרחק 18 ק"מ מיישוב A .

ב. מצאו את המרחק בין יישוב A ובין יישוב B .

כאשר הגיעה מכונית א' ליישוב B היא מייד יצאה חזרה לכיוון היישוב A , וכאשר הגיעה מכונית ב' ליישוב A היא מייד יצאה חזרה לכיוון היישוב B .
בדרכן חזרה נפגשו המכוניות בקטע הכביש המהיר.

ג. מצאו באיזה מרחק מן היישוב B נפגשו המכוניות בדרכן חזרה.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1 , a_2 , a_3 , ...$, ובה m איברים (m הוא מספר טבעי גדול מ־ 4).

נתון: כל איברי הסדרה A הם שליליים.

סכום $m-4$ האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום $m-4$ האיברים הראשונים בסדרה.

א. **(1)** מצאו את מנת הסדרה A .

(2) האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אין־סופית.

נתונה סדרה אין־סופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ לכל n טבעי. k הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k .

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k .

נתון: מנת הסדרה B היא $\frac{1}{4}$.

סכום הסדרה B הוא -9 .

ד. מצאו את הערך של k ואת הערך של b_1 .

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי $(b_3 , b_6 , b_9 ...)$.

ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

3. בכד א' יש 10 כדורים אדומים ו־ 15 כדורים צהובים, ובכד ב' יש רק כדורים אדומים.

דנה בוחרת באקראי כד ומוציאה ממנו באקראי כדור.

אם הכדור צהוב, היא מוציאה באקראי כדור שני מאותו הכד (הוצאה ללא החזרה).

אם הכדור הראשון אדום, היא מחזירה את הכדור לכד ושוב מוציאה באקראי כדור מאותו הכד.

א. ידוע שדנה הוציאה שני כדורים באותו הצבע. מהי ההסתברות ששניהם צהובים?

דנה מחזירה לַכד את הכדורים שהוציאה.

יעל מבצעת את התהליך הזה:

היא בוחרת באקראי כד, מוציאה ממנו באקראי כדור אחד ומחזירה אותו לַכד.

יעל חוזרת על תהליך זה עד שהיא מוציאה כדור אדום, מחזירה אותו לַכד ומפסיקה להוציא כדורים.

ב. מצאו את ההסתברות שיעל ביצעה תהליך זה 6 פעמים בדיוק.

העבירו חלק מן הכדורים מכד ב' לכד א'.

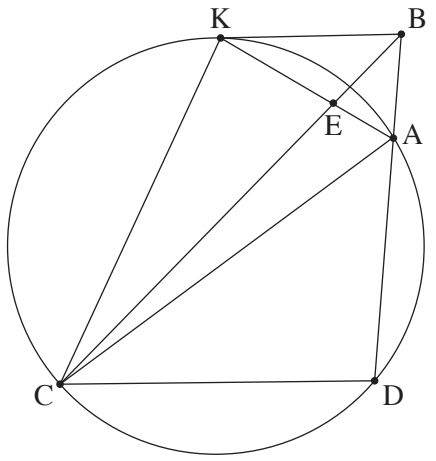
לאחר מכן בחרו באקראי כד והוציאו ממנו באקראי כדור אחד.

נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה אדום היא $\frac{19}{24}$.

ג. האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 10 כדורים? נמקו את תשובתכם.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. במרובע BKCD הצלע KB מקבילה לצלע CD .

הצלע CD היא מיתר במעגל והצלע KB משיקה לַמעגל בנקודה K .

הצלע BD חותכת את המעגל בנקודה A .

האלכסון BC חותך את המיתר AK בנקודה E (ראו סרטוט).

א. הוכיחו כי $\triangle ABK \sim \triangle AKC$.

ב. הוכיחו כי $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$.

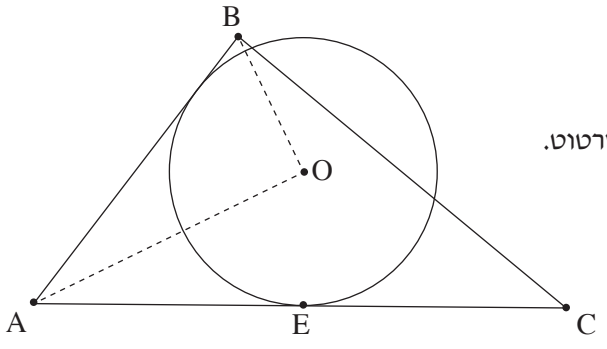
נתון: $BE = \frac{1}{4}CE$.

ג. מצאו את היחס $\frac{AK}{AB}$.

נתון: שטח המרובע ABKC הוא 18 .

נסמן ב־ S את שטח המשולש AEB .

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש KEC .



5. נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R .

מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו־ AC המשיקים למעגל.

הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט.

נתון: $BO \perp AO$, $AE = CE$.

נסמן ב־ 2β את הזווית BAC .

א. הביעו באמצעות R ו־ β את האורך של AB .

נתון כי האורך של AB הוא $2.5R$,

והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של β .

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB .

נתון כי האורך של רדיוס המעגל <u>החוסם</u> את המשולש ABC הוא 8 .

ד. מצאו את הערך של R .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתון כי $f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-a^2)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$ מוגדרות באותו התחום.

בסעיפים א–ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

ג. מצאו פונקצייה $f(x)$ המקיימת תנאים אלה.

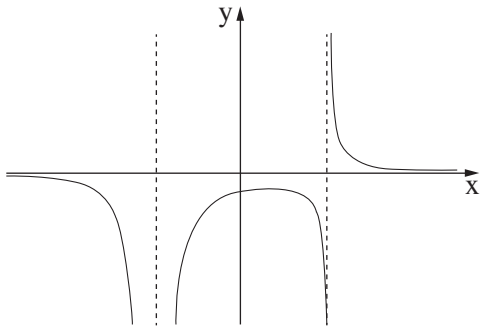
נתונות הפונקצייה $g(x)=\frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$ והפונקצייה $h(x)=\frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$.

הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו־ $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

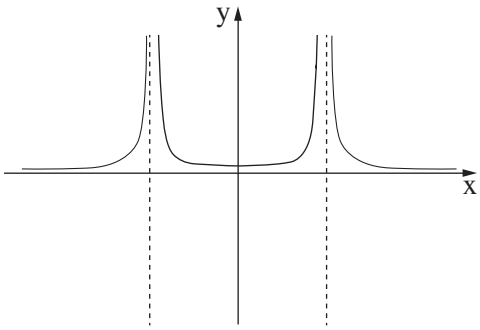
ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו־ $h(x)$ גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I–IV שבסוף השאלה. נמקו את תשובותיכם.

נתון כי לפונקצייה $h(x-6)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $x=0.25a$.

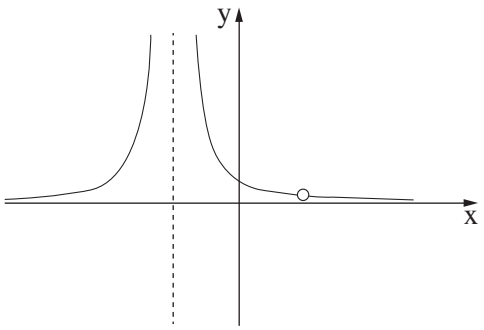
ה. מצאו את הערך של a .



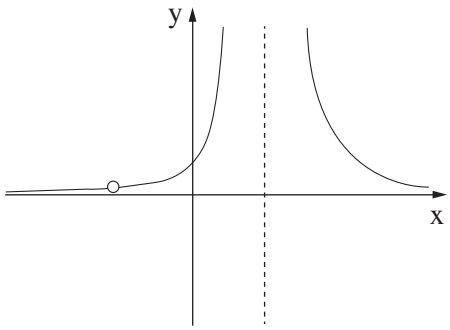
I



II



III



IV

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\cos x+\frac{2}{(\cos x)^2}+a$, בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ משיק לישר $y=2$ בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$ וענו על הסעיפים ד–ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונות הפונקצייה $g(x)=f(x)-k$ והפונקצייה $h(x)=\frac{1}{g(x)}$, שתיהן בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

k הוא פרמטר, $k\ne 2$, $k\ne 4$.

ו. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקצייה $g(x)$ וגרף הפונקצייה $h(x)$ נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

8. נתונה הפונקצייה $f(x)=x\sqrt{21-x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת ואין לה נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם החלק החיובי של ציר ה־x.

מן הנקודה A העבירו שני אנכים:

אנך אחד לציר ה־x החותך אותו בנקודה B , ואנך נוסף לישר $x=21$ החותך אותו בנקודה D .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

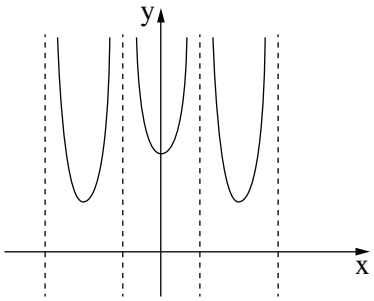
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

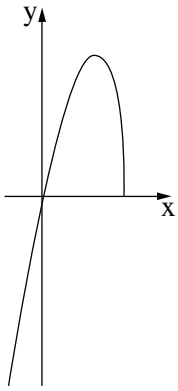
משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35581, גרסה א, חורף תשפ"ה, 2025

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	פי 1.25
ב.	160 ק"מ
ג.	120 ק"מ
.2	
א. (1)	2
(2)	יורדת
ב.	הוכחה
	המנה: $\frac{k}{2}$
ג.	$-2<k<0\,,\,0<k<2$
ד.	$k=\frac{1}{2}$
	$b_1=-\frac{27}{4}$
ה.	$-8\frac{4}{7}$
.3	
א.	$\frac{35}{151}$
ב.	0.001701
ג.	לא
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	$\frac{AK}{AB}=2$
ד.	$14.4-4\cdot S$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א.	$\frac{2R}{\sin(2\beta)}$
ב.	$\beta\approx 26.565^{o}$
ג.	$\frac{16}{5}$
ד.	$R\approx 4$
.6	
א.	$x\neq\pm a$
ב.	תחומי העלייה:
	$x<-a\,,\,0<x<a$
	תחומי הירידה:
	$-a<x<0\,,\,x>a$
ג.	$f(x)=\frac{1}{(x^2-a^2)^2}$
ד.	$II-f(x)$
	$I-g(x)$
	$III-h(x)$
ה.	$a=4.8$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
7.	
א.	$-1.5\pi < x < -0.5\pi$ $-0.5\pi < x < 0.5\pi$ $0.5\pi < x < 1.5\pi$
ב.	זוגית
ג.	$a = 1$
ד.	$\min(-\pi, 2)$ $\min(0, 4)$ $\min(\pi, 2)$
ה.	
ו.	$k = 3$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
8.	
א. (1)	$x \le 21$
(2)	תחום חיוביות: $0 < x < 21$ תחום שליליות: $x < 0$
ב.	
ג.	$A(12, 36)$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תשפ"ד, 2024, **מועד ב**
מספר השאלון: 35581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $4 \times 25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על ארבע מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 25 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. נדב ויוסי יצאו בשעה 8:00 להליכה באותו המסלול (ראו סרטוט).

יוסי הלך מתחילת המסלול עד סופו במהירות קבועה ובלי לעצור בדרך.

נדב הלך מתחילת המסלול 1.8 ק"מ במהירות קבועה, ולאחר מכן הוא החליט לחזור לתחילת המסלול.

בדרכו חזרה הלך נדב במהירות הגדולה פי 1.5 ממהירות הליכתו ההתחלתית.

כאשר הגיע נדב חזרה לתחילת המסלול, היה יוסי במרחק של 4.8 ק"מ מתחילת המסלול.

נסמן ב־ v קמ"ש את מהירות הליכתו ההתחלתית של נדב.

א. הביעו באמצעות v את מהירות ההליכה של יוסי.

במרחק של 3.5 ק"מ מסוף המסלול יש בריכה.

לאחר שהגיע נדב חזרה לתחילת המסלול, הוא יצא שוב להליכה באותו המסלול.

הוא הלך במהירות $(v+2)$ קמ"ש במשך t שעות, עד שהגיע לבריכה.

כאשר הגיע נדב לבריכה, הגיע יוסי לסוף המסלול.

ב. הביעו את t באמצעות v.

נדב הגיע לבריכה בשעה 15:30.

ג. מצאו את v, אם ידוע כי v גדול מ־ 1 קמ"ש.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).

כל איברי הסדרה $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_{2n+1}$ הם חיוביים.

סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.

נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את n .

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין־סופית.

נתון: B היא סדרה אין־סופית המקיימת לכל k טבעי $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב־ 2 .

נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי־זוגיים גדול ב־ $\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1 .

3. במחקר שנעשה בקרב תלמידים בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין חברות בתנועת נוער ובין התנדבות בקהילה.

80% מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.

בוחרים באקראי 5 תלמידים שחברים בתנועת נוער (הוצאה עם החזרה).

א. מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב?

נתון כי 55% מן התלמידים אינם חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים, ו־ $\frac{1}{12}$ מן התלמידים שאינם חברים בתנועת נוער מתנדבים.

ב. כמה אחוזים מן התלמידים חברים בתנועת נוער?

במחקר השתתפו 100 תלמידים סך הכול.

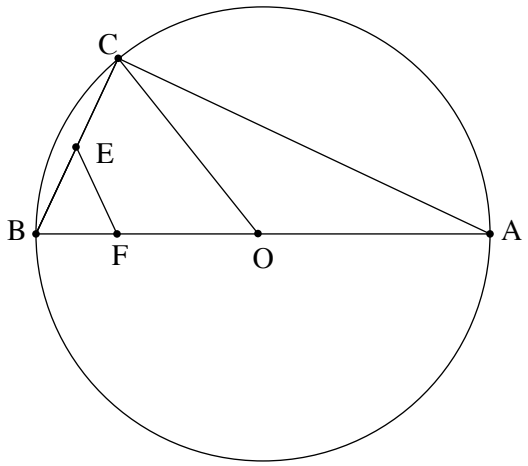
ג. כמה מן התלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים?

ד. בוחרים באקראי 3 מן התלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער וששני התלמידים שנבחרו אחריו אינם חברים בתנועת נוער?

(2) מהי ההסתברות שאחד מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש־ AB הוא קוטר במעגל.

הנקודה E נמצאת על הצלע BC ,

והנקודה F נמצאת על הקטע BO , כמתואר בסרטוט.

נתון כי המרובע CEFO הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $EF = EB$.

המעגל החוסם את המרובע CEFO חותך את הצלע AC בנקודה D

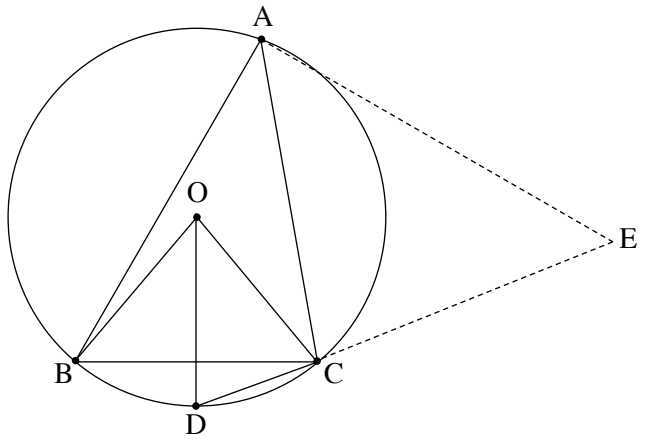
כך ש־ ED מקביל ל־ AB .

ב. **(1)** הוכיחו כי המרובע EDOB הוא מקבילית.

(2) הוכיחו: $OD \perp AC$.

הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC .

ג. הוכיחו כי הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO .



5. משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R .

הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC , כמתואר בסרטוט.

נתון: $\sphericalangle ABC = 60^o$.

נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$.

א. הביעו באמצעות R ו־ α את שטחי המשולשים ABC ו־ ODC .

נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC

ובין שטח המשולש ODC הוא $2\sqrt{3}\sin(80^o)$.

ב. מצאו את הערך של α .

הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש־ $\sphericalangle CAE = 50^o$, כמתואר בסרטוט.

ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש ACE .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום $x \neq a$, a הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ y .

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה־ x , וקבעו את סוגה.

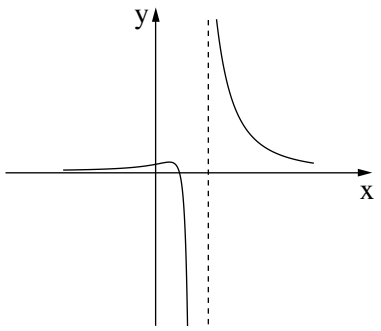
הגרפים 1–4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקצייה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a .

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים I–IV של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

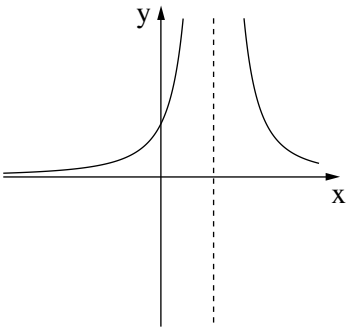
I. $a=-1$ II. $a=0.5$ III. $a=1$ IV. $a=2$

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x)-b$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2 .
b הוא פרמטר חיובי.
אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x היא $(t,0)$, $1<t<5$.
נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $g(x)$, על ידי הישר $x=t$ ועל ידי הישר $x=5$ הוא 1.75 .

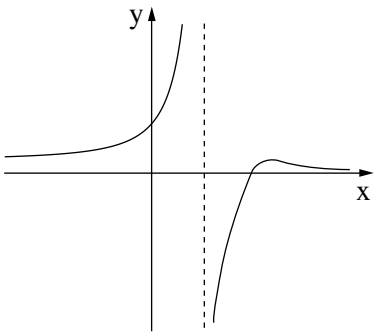
ד. מצאו את הערך של b .



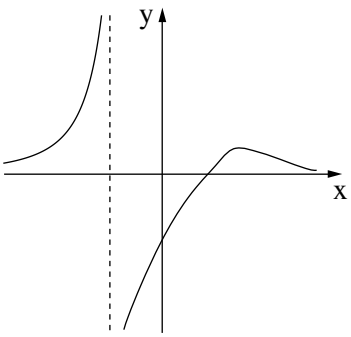
1



2



3



4

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(b+\cos x)\sin x$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$, b הוא פרמטר.

א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה־ x .

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I–III לערכים של b .

קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקצייה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם.

I. $b=0$ II. $0<b<1$ III. $1\le b$

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$, כאשר $\cos x=\frac{1}{4}$, הוא $\left(-\frac{5}{8}\right)$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b=1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת $g(x)=(f(x))^2\cdot f'(x)$. הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le \pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

8. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sqrt{x}$, המוגדרת בתחום $x\ge 0$, ונתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{16}{x^2+3}$, המוגדרת לכל x .

א. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

בנקודה $C(t,0)$ מעבירים אנך לציר ה־ x , $t>0$.

האנך חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקצייה $g(x)$ בנקודה B .

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו־ BC .

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו־ BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $k(x)=\frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3}$, המוגדרת בתחום $x\ge 4$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקצייה $k(x)$, וקבעו את סוגה.

נמקו את תשובתכם.

בהצלחה!

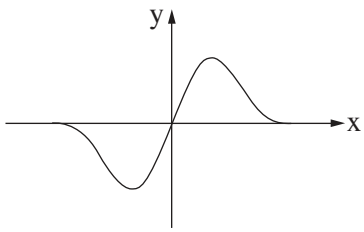
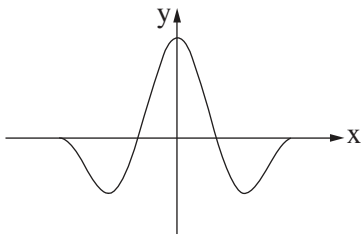
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

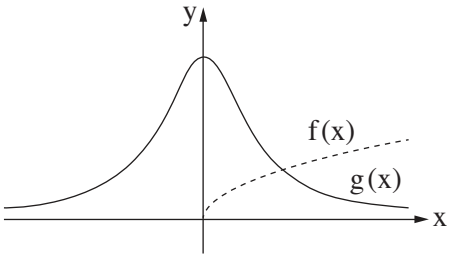
משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35581, גרסה א, קיץ תשפ"ד, מועד ב, 2024

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	$1.6v$
ב.	$t = \frac{1.3}{2 - 0.6v}$
ג.	$v = 3$
.2	
א.	$n = 7$
ב.	הוכחה
	המנה 0.25
ג.	$a_1 = \frac{4}{3}$
.3	
א.	0.672
ב.	40%
ג.	8
ד. (1)	$\frac{1,320}{13,237}$
(2)	$\frac{432}{1,891}$
.4	
א.	הוכחה
ב. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה
ג.	הוכחה

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א.	$S_{ABC} = \sqrt{3} \cdot R^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(120^o - \alpha)$ $S_{ODC} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin(\alpha)$
ב.	$\alpha = 40^o$
ג.	$\sim 0.519 \cdot R$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א. (1)	$x = a$ $y = 0$
(2)	$(0, \frac{1}{a^3})$
ב.	$a > 1$
ג.	מקסימום I – גרף 4 II – גרף 3 III – גרף 2 IV – גרף 1
ד.	$b = 4$
.7	
א.	אי־זוגית
ב.	III
ג.	$b = 1$
ד.	$\max(-\pi, 0), \min(-\frac{\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$ $\max(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}), \min(\pi, 0)$
ה. (1)	
(2)	
ו.	$\frac{27\sqrt{3}}{64}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א. (1)	$\max(0, \frac{16}{3})$
(2)	$(\pm 1, 4)$
(3)	
ב.	$\frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$
ג.	הוכחה
ד.	$\max(5, 2)$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשפ"ד, 2024
מספר השאלון:	35581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $4 \times 25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על ארבע מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 25 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. הבית של אורי והבית של דני נמצאים בין הבריכה ובין המכולת, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

המרחק בין המכולת לבריכה הוא 12.5 ק"מ. המרחק בין הבית של אורי ובין הבית של דני הוא 2.3 ק"מ.

בכל יום רכב אורי על אופניים במהירות v קמ"ש, ודני רכב במהירות הגדולה ב־ 6 קמ"ש ממהירות הרכיבה של אורי.

בימים ראשון ושני רכב אורי מביתו לבריכה, ודני רכב מביתו למכולת.

בכל אחד מן הימים ראשון ושני הם יצאו לרכיבה באותה השעה.

ביום ראשון כאשר הגיע דני למכולת, היה אורי במרחק של 4.8 ק"מ מן הבריכה.

ביום שני כאשר הגיע דני למכולת, הוא עצר שם וערך קניות במשך 24 דקות. בדיוק באותו הזמן שדני סיים לערוך את הקניות הגיע אורי לבריכה.

א. **(1)** מצאו את מהירות הרכיבה של אורי.

(2) מצאו את המרחק בין הבית של דני ובין המכולת.

ביום שלישי רכב דני מביתו אל המכולת, ערך קניות במשך חצי שעה, וחזר לכיוון ביתו. ביום זה רכב גם אורי למכולת.

45 דקות אחרי שיצא דני מביתו, יצא אורי מן המכולת ורכב לכיוון ביתו.

ב. האם בדרכם חזרה לבתיהם הם נפגשו בדרך שבין המכולת ובין הבית של אורי? נמקו את תשובתכם.

/המשך בעמוד 3/

2. הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ומנתה היא q, $-1 < q < 0$.

נתון: $a_1 = 1$.

הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q.

ב. לפניכם שלוש טענות $I-III$. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

II. הסדרה B היא סדרה עולה.

III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה B היא סדרה אין־סופית שסכומה הוא $\frac{1}{8}$.

ג. מצאו את ערכו של q.

נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

נתון: $c_3 + c_4 + \ldots + c_m = 44,307$, m הוא מספר טבעי.

ד. מצאו את הערך של m.

3. בחידון יש 5 שאלות. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא P.

ידוע כי ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 4 שאלות לכל היותר היא 0.83193.

א. מצאו את P.

ב. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 3 שאלות בדיוק.

מספר הנקודות הניתן לכל שאלה זהה למספר השאלה. כלומר מתמודד שענה נכון על שאלה 1, מקבל נקודה אחת.

מתמודד שענה נכון על שאלה 2 מקבל שתי נקודות, וכן הלאה.

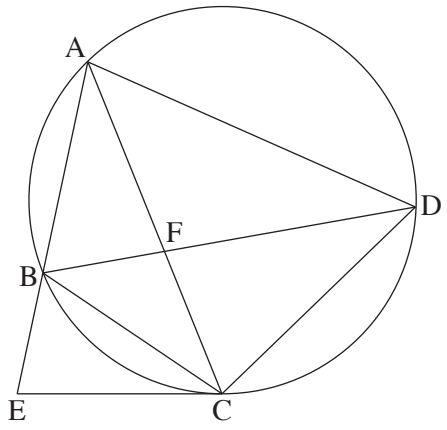
ג. מצאו את ההסתברות שמתמודד יצבור 14 נקודות לפחות.

ד. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יצבור 6 נקודות בדיוק.

ה. ידוע כי אחינועם ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק. מצאו את ההסתברות שהיא צברה 6 נקודות בדיוק.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. המרובע $ABCD$ חסום במעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה F.

המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך המיתר AB בנקודה E (ראו סרטוט).

נתון: $AB = CB$.

א. הוכיחו: $\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC$.

נתון: AC חוצה את זווית ECD,

$\frac{CD}{CF} = \frac{7}{4}$.

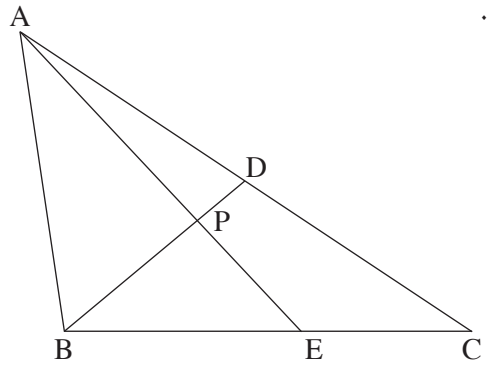
ב. **(1)** הוכיחו: $AC = AD$.

(2) מצאו את היחס $\frac{AD}{CD}$.

(3) מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש CBF.

נסמן את שטח המשולש ABF ב־ S.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.



5. במשולש ABC, BD הוא תיכון לצלע AC. הנקודה E נמצאת על הצלע BC.

BD ו־ AE נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט).

נתון: $BP = 3 \cdot PD$.

נסמן: $AB = k$, $\sphericalangle BAP = \alpha$, $\sphericalangle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.

א. הביעו באמצעות α, β ו־ k את אורכי הקטעים AP ו־ BP.

נתון כי AE ו־ BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABD הוא $\frac{1}{4}k^2$.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC

ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{4x}{(x^2-a)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א–ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g'(x)=f(x)$. גרף הפונקצייה $g(x)$ עובר בנקודה $(0\,,0)$.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקצייה $g(x)$.

ד. **(1)** מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ שמצאתם בתת־סעיף ד(1).

$h(x)$ היא פונקצייה המוגדרת כך: $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

הפונקציות $h(x)$ ו־ $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקצייה $h(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקצייה $h(x)$.

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}$, בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) הראו כי הפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה זוגית.

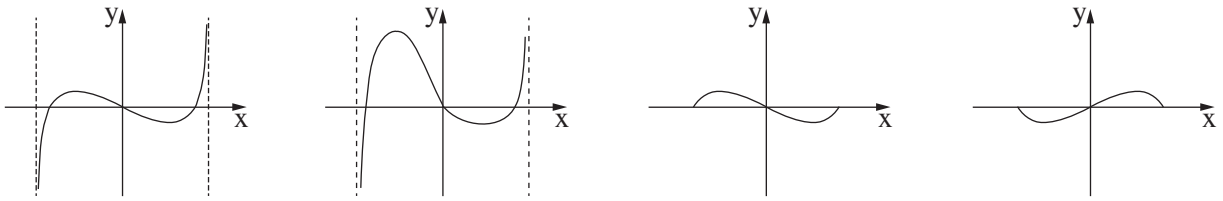
(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. קבעו איזה מן הגרפים $\text{I}-\text{IV}$ שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



I II III IV

נתונה הפונקצייה $g(x)=k-f(x)$, k הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום בין 0 ל־ $\frac{\pi}{2}$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=\frac{\pi}{2}$ ו־ $x=-\frac{\pi}{2}$ הוא $10\cdot S$.

ה. הביעו את k באמצעות S .

8. הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R .

מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D ,

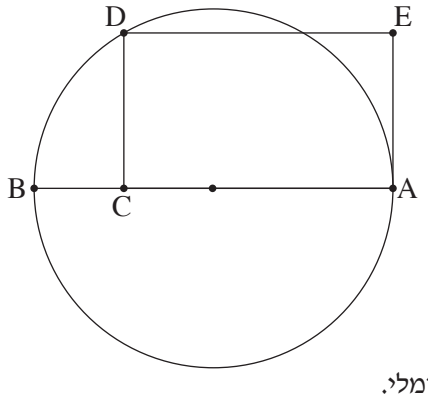
כך שהקטע CD מאונך לקטע AB . הקטע AC גדול מ־ R .

דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB .

דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל.

הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E .

נסמן: $AC=x$.



א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן $ACDE$ מקסימלי.

הנקודה F נמצאת על הצלע DE .

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו־ AFE .

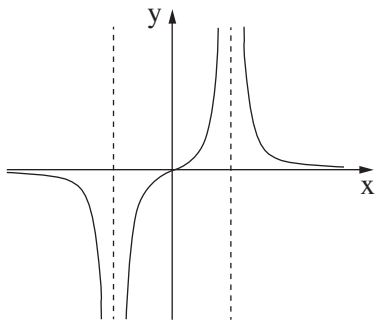
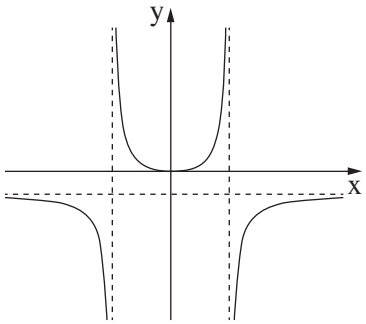
בהצלחה!
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

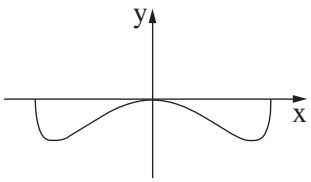
משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35581, גרסה א, קיץ תשפ"ד, 2024

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א. (1)	12 קמ"ש
(2)	6 ק"מ
ב.	כן
.2	
א.	הוכחה
	המנה q^2
ב.	I נכונה
	II לא נכונה
	III נכונה
ג.	$q = -\frac{1}{3}$
ד.	$m = 9$
.3	
א.	$p = 0.7$
ב.	0.3087
ג.	0.2401
ד.	0.05733
ה.	$\frac{1}{10}$
.4	
א.	הוכחה
ב. (1)	הוכחה
(2)	$\frac{AD}{CD} = \frac{4}{3}$
(3)	$\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta CBF}} = \frac{4}{3}$
ג.	$2.75 \cdot S$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א.	$AP = \frac{k \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ $BP = \frac{k \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$
ב.	$\alpha \approx 24.3^{o}$
ג.	~ 1.843

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א. (1)	$x \neq \pm\sqrt{a}$
(2)	$x = \pm\sqrt{a}, y = 0$
(3)	תחום עלייה: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ תחומי ירידה: $x < -\sqrt{a}, x > \sqrt{a}$
ב.	
ג.	תחומי הקעירות כלפי מעלה: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ תחומי הקעירות כלפי מטה: $x < -\sqrt{a}, x > \sqrt{a}$
ד. (1)	$g(x) = -\frac{2}{x^2 - a} - \frac{2}{a}$
(2)	
ה. (1)	$x = \pm\sqrt{a}, y = 0$
(2)	$x < -\sqrt{a}, 0 < x < \sqrt{a}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א. (1)	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
(2)	להראות
(3)	$(0,0), (\pm\frac{\pi}{2}, 0)$
(4)	$\max(0, 0)$ $\min(\pm 0.42\pi, -0.25)$ $\max(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$
ב.	
ג.	תחומי שליליות: $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ $0 < x < \frac{\pi}{2}$
ד.	IV
ה.	$k = \frac{6 \cdot S}{\pi}$
.8	
א.	$x_{max} = 1.5R$
ב.	$\frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot R^2$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: חורף תשפ"ד, 2024
מספר השאלון: 35581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $4 \times 25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על ארבע מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 25 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. אלון יצא בשעה 8:00 מעיר א' לעיר ב'. אלון הלך במהירות קבועה במשך חצי שעה, ולאחר מכן עצר למנוחה של 10 דקות.
לאחר המנוחה התחיל אלון לרוץ לכיוון עיר ב' במהירות הגדולה פי 2 ממהירות הליכתו.
אלון רץ במשך חצי שעה $\frac{1}{6}$ מן המרחק בין שתי הערים, ולאחר מכן עצר שוב למנוחה של 10 דקות.
לאחר המנוחה השנייה המשיך אלון לרוץ באותה המהירות עד שהגיע לעיר ב'.
דני יצא מעיר ב' ורכב על אופניים לעיר א'. הוא רכב במהירות קבועה. אחרי שעה ו־ 50 דקות הוא הגיע לנקודה שבה נח אלון לראשונה.

א. מצאו פי כמה גדולה מהירות הרכיבה של דני ממהירות ההליכה של אלון.

כאשר הגיע דני לנקודה שבה עצר אלון למנוחה בפעם הראשונה הוא הגביר את מהירות הרכיבה שלו למהירות הגדולה ב־ 12.6 קמ"ש ממהירותו ההתחלתית.
אלון ודני הגיעו ליעדם בדיוק באותה השעה.

ב. מצאו את מהירות ההליכה של אלון אם נתון כי דני יצא מעיר ב' בשעה 9:40 .

ג. מצאו בין אילו שעות היה צריך דני לצאת מעיר ב', אילו היה רוצה לחלוף על פני אלון במהלך המנוחה השנייה שלו.

2. בסדרה חשבונית A נתון: $a_1 = -4 - 4k$, $a_3 = -16 + 2k$. k הוא פרמטר.

א. מצאו עבור אילו ערכים של k :
(1) הסדרה A עולה, (2) הסדרה A יורדת, (3) הסדרה A קבועה.

נתון כי $a_{17} = -232$.

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג–ד.
נתונה סדרה חדשה, B , שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי, $b_n = a_n + 24n + 17$.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

ד. חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

/המשך בעמוד 3/

3. ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב.

בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד.

כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת הפארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים).

כל התושבים המבוגרים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר.

נסמן ב־ p את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר.

נסמן ב־ k את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק.

א. הביעו באמצעות p ו־ k את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק.

מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

$\frac{3}{7}$ מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים.

ב. מצאו את p ואת k.

יוסי, כתב חדשות מקומי, ריאיין באקראי 6 מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר.

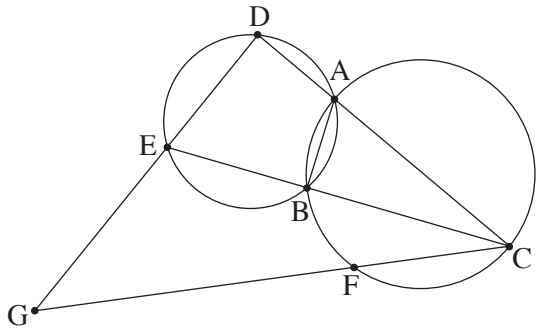
ג. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק?

לאחר מכן ריאיין יוסי באקראי, בזה אחר זה, 5 תושבים שהשתתפו בסקר.

ד. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן המרואיינים האלה היו צעירים, ושהמרואיין האחרון מהם היה צעיר?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו־ B . C היא נקודה על המעגל הימני.

המשכי הקטעים CA ו־ CB חותכים את המעגל השמאלי

בנקודות D ו־ E בהתאמה.

הנקודה F נמצאת על הקשת BC , כמתואר בסרטוט.

המשכי הקטעים CF ו־ DE נפגשים בנקודה G .

א. הוכיחו: $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$.

ב. הוכיחו: המרובע GDAF הוא בר חסימה במעגל.

המיתרים AF ו־ BC נפגשים בנקודה H .

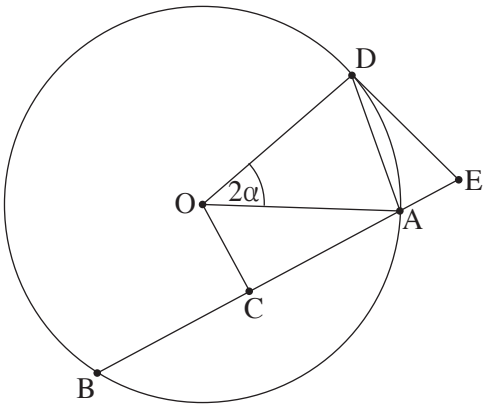
נתון: $\sphericalangle GEC = \sphericalangle CHA$.

ג. הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

נתון: CE מאונך ל־ AB .

$CD = 36 \ , \ DE = 18$.

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו־ CG .



5. נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R .

מנקודה E , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל

בנקודות A ו־ B , כמתואר בסרטוט.

הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB ,

כך שהקטע ED משיק למעגל.

הנקודה C היא אמצע המיתר AB .

נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו־ OA ב־ 2α $(\alpha < 60^o)$.

נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא $0.5R$.

א. מצאו את זוויות המרובע DOCE . הביעו באמצעות α אם יש צורך.

ב. הביעו באמצעות R ו־ α את אורך הקטע DE .

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.

ג. מצאו את α .

ד. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע DOCE ובין שטח המעגל הנתון.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה: $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. הראו כי לכל $x>0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים $f(x)=g'(x)$.

ד. לפניכם טענות I–II . קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. יש משיק לגרף הפונקצייה $g(x)$ ששיפועו הוא 2 .

II. לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

ה. חשבו את ערך הביטוי $\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)\,dx$.

7. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים $\sin(x)\neq -a$.

נתון כי הגרף של הפונקצייה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ב–ה עבור התחום $-2\pi\le x\le 2\pi$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=-1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקצייה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

$$\int_{0}^{\pi}(f(x)+1)\,dx>\frac{\pi}{2}$$.

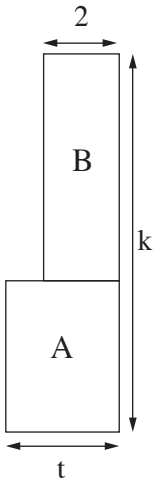
/המשך בעמוד 6/

8. נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B .

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא $2t + 2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.



א. הביעו באמצעות k ו־t את שטח הגינה A .

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

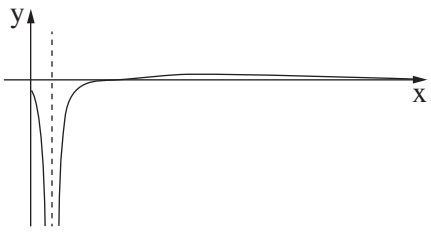
בהצלחה!

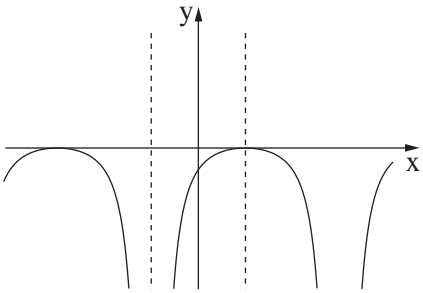
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35581, גרסה א, חורף תשפ"ד, 2024

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	3
ב.	4.2 קמ"ש
ג.	7:50 – 7:40
.2	
א.	$k > 2$ (1) $k < 2$ (2) $k = 2$ (3)
ב.	-3
ג.	הוכחה
ד.	$-48,465$
.3	
א.	$p + k - 1$
ב.	$p = 0.6 \quad k = 0.7$
ג.	$\frac{31}{32}$
ד.	$\frac{648}{3125}$
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	הוכחה
ד.	$EG = 30$ $CG = 60$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א.	$120^o - 2\alpha\ ,\ 60^o + 2\alpha\ ,\ 90^o\ ,\ 90^o$
ב.	$\frac{2R\sin\alpha \cdot \sin(60^o + \alpha)}{\sin(120^o - 2\alpha)}$
ג.	28.96^o
ד.	0.55
.6	
א. (1)	$x \neq 4\ ,\ x \geq 0$
(2)	$x = 4$ $x \to \infty\ ,\ y = 0$
(3)	$(0\ ,-1)\ ,\ (16\ ,0)$
(4)	$\max(36\ ,\frac{1}{8})$ $\max(0\ ,-1)$
ב.	
ג.	להראות
ד.	טענה I – לא נכונה טענה II – נכונה
ה.	$1\frac{17}{18}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.	$a=1$
ב. (1)	$x \neq \frac{3\pi}{2}$, $x \neq -\frac{\pi}{2}$
(2)	$(-\frac{3\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, -1)$
(3)	$\max(2\pi, -1)$
	$\max(\frac{\pi}{2}, 0)$
	$\max(-\frac{3\pi}{2}, 0)$
	$\min(-2\pi, -1)$
ג.	
ד.	5
ה.	נכונה
.8	
א.	$t(k-t-1)$
ב.	$\sqrt{k}-1$
ג.	$\sqrt{k}-1$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תשפ"ג, 2023, **מועד ב**
מספר השאלון: 35581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

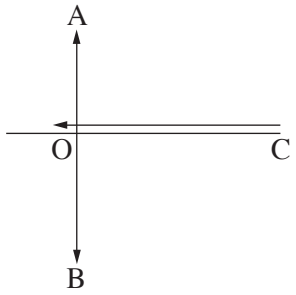
/המשך מעבר לדף/

השאלות

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות



1. הנקודה A נמצאת מצפון לנקודה O והנקודה B נמצאת מדרום לנקודה O .

הנקודה C נמצאת ממזרח לנקודה O , במרחק של 15 ק"מ ממנה, כמתואר בסרטוט.

ביום ראשון יצא אורי להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה A .

באותו הזמן יצאה סמדר לריצה מן הנקודה C לכיוון הנקודה O .

מהירות הריצה של סמדר גדולה פי 3 ממהירות ההליכה של אורי.

נתון כי ברגע שהגיע אורי לנקודה A , המרחק האווירי בינו לבין סמדר היה $\sqrt{145}$ ק"מ.

המהירויות של אורי ושל סמדר קבועות.

א. מצאו את המרחק שהלך אורי ואת המרחק שרצה סמדר ביום ראשון, אם נתון שסמדר חלפה בריצתה על פני הנקודה O .

באותו יום יצא בועז להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה B . בועז יצא להליכה 20 דקות לאחר שיצא אורי להליכה.

מהירות ההליכה של בועז הייתה קבועה וגדולה ב־ 50% ממהירות ההליכה של אורי.

כאשר הגיע אורי לנקודה A , המרחק בינו לבין בועז היה 18 ק"מ, ובאותו רגע שניהם עצרו.

ב. מצאו את מהירות ההליכה של אורי ואת מהירות ההליכה של בועז.

ביום שני יצאו אורי ובועז להליכה באותו הזמן. כל אחד מהם יצא מאותה הנקודה שבה עצר ביום ראשון, והמשיך ללכת באותו הכיוון שהלך ביום ראשון. בועז הקטין את מהירות הליכתו ב־ v קמ"ש ואורי הגדיל את מהירות הליכתו ב־ v קמ"ש.

שניהם עצרו כאשר המרחק ביניהם היה 24 ק"מ.

ג. מצאו כמה דקות הלך אורי ביום שני.

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1 , a_2 , ... a_{3n}$ שבה $3n$ איברים, וההפרש שלה הוא d .

נסמן ב־ S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל־ 0 .

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_2 , a_5 , a_8 , ... , a_{3n-4}$.

סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 36 .

ד. מצאו את d .

3. עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 6:00.

מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן.

כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{3}{4}$,

וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{9}$.

נסמן ב־ p את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.

בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

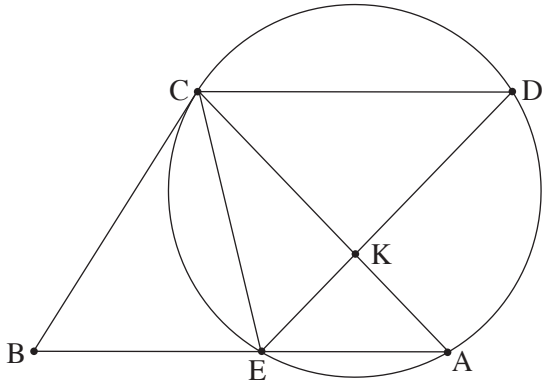
באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו־A, כמתואר בסרטוט.
הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA.
המיתרים ED ו־AC נחתכים בנקודה K.



א. הוכיחו: $\triangle CEB \sim \triangle DCE$.

נתון: $AK = 3$, $ED = 7$.

נסמן את שטח המשולש CEK ב־S.

ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.

נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.

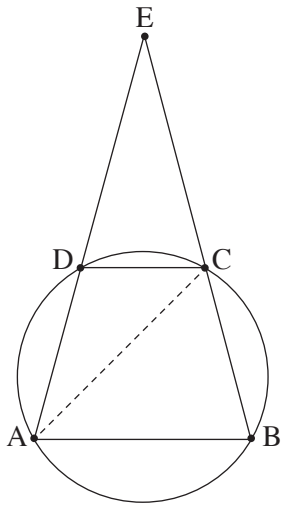
הנקודה O היא מרכז המעגל.

ד. הוכיחו: $\sphericalangle COE = \sphericalangle CKE$.

נתון: $\sphericalangle CAE = 45^o$.

ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O ו־K נמצאות על מעגל אחד.

5. נתון טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$, החסום במעגל.
המשכי הצלעות AD ו־BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט.
נתון: $\sphericalangle ACB = 60^o$.
נסמן: $AC = k$, $\sphericalangle CDE = \alpha$.



א. **(1)** מצאו את זוויות המשולש ACE (הביעו באמצעות α אם יש צורך).
(2) הביעו באמצעות α ו־k את אורכי הצלעות AB ו־DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא $\sqrt{7}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x^2-a^2}{(x-4)^2}$, $0<a<4$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{x^2}{(x-4)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ב. **(1)** הוכיחו כי גרף הפונקצייה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, על ידי הישר $x=1$ ועל ידי ציר ה־ y .

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

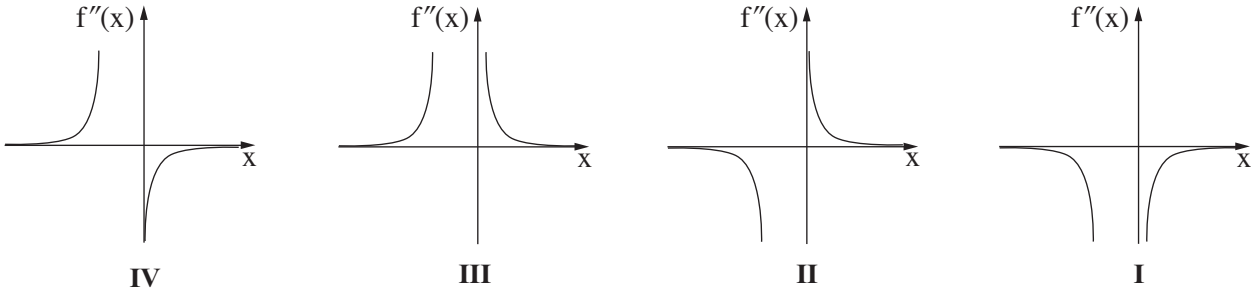
(4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

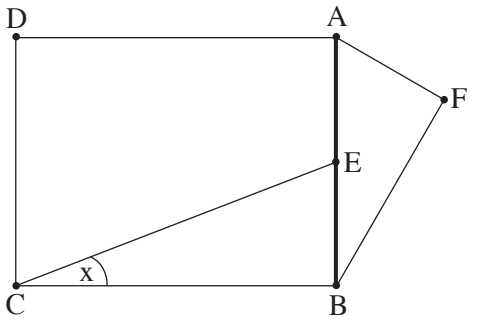
ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. היעזרו בגרף הפונקצייה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.
נמקו את קביעתכם.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=1$ ו־ $x=2$.



8. הנקודה E היא אמצע הקטע AB .
על הקטע AB בונים מלבן ABCD
ומשולש ישר זווית AFB , $\sphericalangle AFB=90^o$, כמתואר בסרטוט.
נתון: $\sphericalangle ECB=x$, $\sphericalangle FAB=2x$.
נסמן את אורך הקטע AB ב־ h .



א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x ? הסבירו את תשובתכם.

ב. הביעו באמצעות x ו־ h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF .

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.

ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB .

בהצלחה!

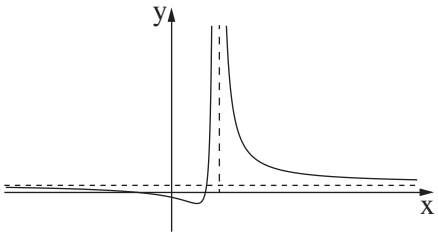
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

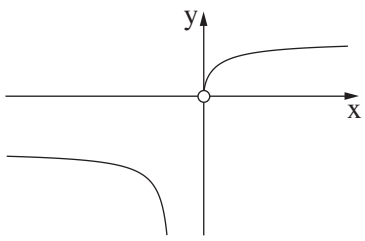
משרד החינוך

פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35581, גרסה א, קיץ תשפ"ג, 2023, מועד ב

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	אורי – 8 ק"מ
	סמדר – 24 ק"מ
ב.	אורי – 4 קמ"ש
	בועז – 6 קמ"ש
ג.	36 דקות
.2	
א.	הוכחה
ב.	שלילי
ג.	39
ד.	-2
.3	
א.	$\frac{3}{5}p$
ב.	54%
ג.	$\frac{90}{529}$
ד.	0.998
.4	
א.	הוכחה
ב.	$\frac{4}{3}S$
ג.	$\frac{175}{96}S$
ד.	הוכחה
ה.	הסבר

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א. (1)	120°
	$180^o - 2\alpha$
	$2\alpha - 120^o$
(2)	$AB = \frac{\sqrt{3}k}{2\sin\alpha}$
	$DC = \frac{k \cdot \sin(2\alpha - 120^o)}{\sin\alpha}$
ב.	$\alpha = 75^o$
ג.	$k = 2$
.6	
א. (1)	$x \neq 4$
(2)	$y = 1 \ , \ x = 4$
(3)	$(-a, 0)\ (a, 0) \ , \ \left(0, -\frac{a^2}{16}\right)$
(4)	$\min, x = \frac{a^2}{4}$
(5)	
ב. (1)	הוכחה
(2)	$\frac{a^2}{12}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
7.	
א. (1)	$0 < x\ ,\ x < -1$
(2)	לא
(3)	$,\ x = -1$
	$x \to \infty \quad y = 2$
	$x \to -\infty \quad y = -2$
(4)	תחומי העלייה: $0 < x$
	תחומי הירידה: $x < -1$
ב.	
ג.	גרף I
ד.	0.217

מספר השאלה	התשובה הנכונה
8.	
א.	$0 < x < 45^{o}$
ב.	$\frac{0.5h}{\sin x} - h \cdot \cos(2x)$
ג.	$x = 30^{o}$
ד.	4

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשפ"ג, 2023
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. שני רוכבי אופניים, רוכב א' ורוכב ב', יצאו משני מקומות, A ו־ B , בהתאמה, ורכבו זה לקראת זה.

המרחק בין המקומות A ו־ B הוא 3d ק"מ (d הוא פרמטר חיובי).

רוכב ב' יצא לדרך 2.5 שעות אחרי שרוכב א' יצא לדרך.

בשעה 15:30 התברר שכל אחד מן הרוכבים עבר שליש מן המרחק בין המקומות A ו־ B .

המהירות של כל אחד מן הרוכבים הייתה קבועה.

למוחרת שוב יצאו הרוכבים מאותם המקומות, A ו־ B , ורכבו זה לקראת זה.

כל אחד מן הרוכבים רכב באותה המהירות שבה רכב ביום הראשון. הפעם הם יצאו באותו הזמן ונפגשו כעבור 9 שעות.

א. **(1)** באיזו שעה ביום הראשון יצא רוכב א' ממקום A ?

(2) הביעו באמצעות d את המהירות של כל אחד מן הרוכבים.

הזמן שנדרש לרוכב א' לעבור קילומטר אחד גדול ב־ 1.25 דקות מן הזמן שנדרש לרוכב ב' לעבור קילומטר אחד.

ב. מצאו את המרחק בין A ל־ B .

2. נתונות שתי סדרות הנדסיות אין־סופיות מתכנסות, A ו־ B , שכל איבריהן שונים מ־ 0 .

האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A .

האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B .

משתי הסדרות ההנדסיות A ו־ B בונים סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת חדשה, שאיבריה הם:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

כל שלוש הסדרות, הסדרה A , הסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו־ q_B .

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1 , c_2 ו־ c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

נתון כי c_2 שווה ל־ $-c_1$, ומתקיים גם: $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}$.

ג. מצאו את c_1 .

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל־ c_1 ,

ומתקיים גם: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$

ד. מצאו את הערך של q_B .

3. במכללה גדולה, הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצוהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים.

בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א' וכל תלמידי שנה ב'.

על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א'. עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א' שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.

נסמן ב־ p את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א' הוא בעד ההצעה, גדולה ב־ $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב' הוא בעד ההצעה.

ב. חשבו את הערך של p .

ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל. חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה:

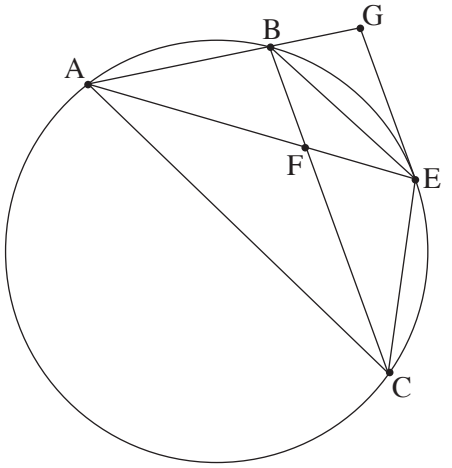
I. המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב' II. המשתתף שנבחר בעד ההצעה.

ד. בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל.

ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם תלמידי שנה ב'.

מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. הנקודות A , B ו־ C נמצאות על מעגל.

נקודה E היא אמצע הקשת BC , כמתואר בסרטוט שלפניכם.

בנקודה E מעבירים משיק למעגל.

המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G .

המיתרים AE ו־ BC נחתכים בנקודה F .

א. הוכיחו: $\Delta ACE \sim \Delta AEG$.

נתון: $AG = 6$, $AE = 3\sqrt{6}$.

ב. חשבו את אורך המיתר AC .

ג. הוכיחו: $BC \parallel GE$.

נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE .

ד. חשבו את אורך המיתר AB .

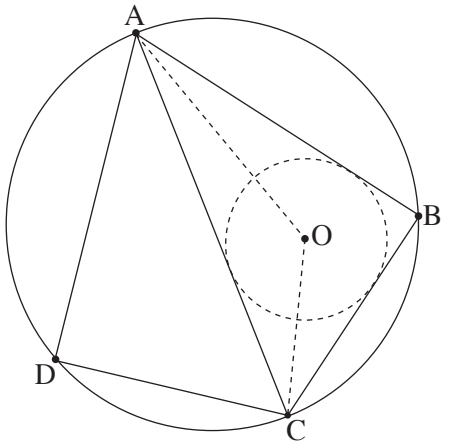
ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC ? נמקו את תשובתכם.

5. דלתון $ABCD$ חסום במעגל שרדיוסו R .

המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון.

הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle CAB = \alpha$.



א. **(1)** מצאו את זוויות המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).

(2) הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו־ R .

נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

נתון כי שטח הדלתון הוא $25\sqrt{3}$.

ג. מצאו את R .

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2a-x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x\neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

(2) הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי־זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

(4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.

(5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחום הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה גם הפונקצייה $g(x)=|f(x)|-b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

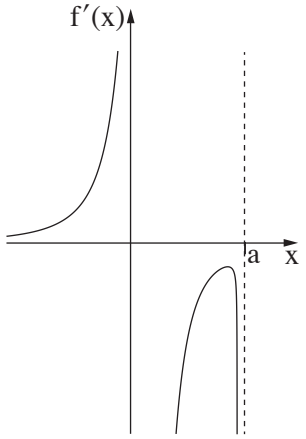
ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ היא: $(2\,,-3)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו־ b .

נתונה גם הפונקצייה $s(x)=\int_1^x g(t)\,dt$, המוגדרת בתחום $1<x$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.



7. נתונה הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \le a$, $x \ne 0$. a הוא פרמטר חיובי.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x \ne 0$, $x < a$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות

לצירים שמשוואותיהן: $y = 0$, $x = a$, $x = 0$.

בתחום $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה.

הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקצייה $f(x)$.

$f(a) = 0$.

א. **(1)** מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקצייה $f(x)$

(הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך). נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתת־סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים I–IV שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ **II.** $\frac{\sqrt{x-a}}{x^2}$ **III.** $\frac{\sqrt{a-x}}{x}$ **IV.** $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$

ג. איזה מן הביטויים I–IV מייצג את הפונקצייה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = (-2)$, הוא: $\frac{7}{16}$.

ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = 1$.

8. נתון מעוין $ABCD$. נקודה E היא אמצע הצלע BC .

נסמן: $\sphericalangle ECD = x$.

נתון: שטח המשולש ECD הוא 18 .

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE .

בהצלחה!
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

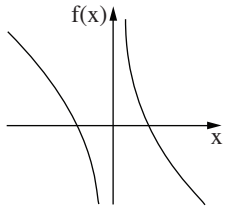
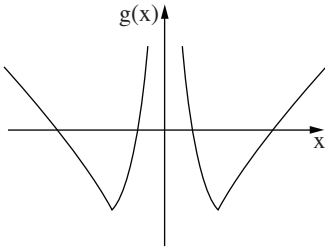
משרד החינוך

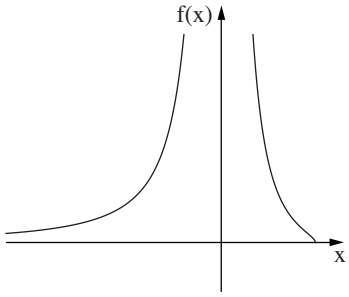
פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 35581, גרסה א, קיץ תשפ"ג, 2023

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א. (1)	08:00
(2)	מהירות רוכב א': $\frac{2}{15}d$
	מהירות רוכב ב': $\frac{1}{5}d$
ב.	360 ק"מ
.2	
א.	$\frac{q_A}{q_B}$
ב. (1)	לא נכון
(2)	נכון
ג.	$-\frac{1}{15}$
ד.	$\frac{1}{5}$
.3	
א.	0.8
ב.	$p=\frac{5}{12}$
ג.	$\frac{3}{4}$
ד.	$\frac{32}{125}=0.256$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	$AC=9$
ג.	הוכחה
ד.	$AB=4$
ה.	$\frac{4}{9}$
.5	
א. (1)	$45^o-\frac{1}{2}\alpha\,,\,\frac{1}{2}\alpha\,,\,135^o$
(2)	$AO=2\sqrt{2}\,R\sin(45^o-\frac{1}{2}\alpha)$
ב.	$\alpha=30^o$
ג.	$R=5$
ד.	2.59

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א. (1)	$x = 0$
(2)	להראות
(3)	$(-\sqrt{2a}\ ,0)\ ,(\sqrt{2a}\ ,0)$
(4)	תחומי עלייה: אין תחומי ירידה: $x > 0\ ,\ x < 0$
(5)	תחום קעירות כלפי מעלה: $x > 0$ תחום קעירות כלפי מטה: $x < 0$
ב.	
ג.	
ד.	$b = 3\ ,\ a = 2$
ה.	min

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א. (1)	תחום עלייה: $x < 0$ תחום ירידה: $0 < x < a$
(2)	1
ב.	
ג.	I
ד.	$a = 2$
ה.	$\frac{5}{24}$
.8	
א.	$\sqrt{\frac{72}{\sin x}}$
ב.	$\sqrt{54}$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: חורף תשפ"ג, 2023
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1–8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. לאורך גדת נהר יש שלוש תחנות: תחנה A , תחנה B ותחנה C שנמצאת בנקודה מסוימת בין תחנה A ובין תחנה B .

הנהר זורם מכיוון תחנה A לכיוון תחנה B במהירות קבועה.

שתי סירות, סירה I וסירה II , יצאו בשעה 8:00 מנקודה C ושטו לכיוונים הפוכים:

סירה I שטה (נגד הזרם) אל תחנה A , וסירה II שטה (עם הזרם) אל תחנה B .

מייד לאחר שכל אחת מן הסירות הגיעה לתחנה המתאימה, היא הסתובבה ושטה בכיוון ההפוך.

נתון כי המהירות של כל אחת מן הסירות במים עומדים היא קבועה.

המהירות של סירה I כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 1.5 ממהירותה כאשר היא שטה נגד הזרם.

המהירות של סירה II כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 4 ממהירותה של **סירה I** כאשר היא שטה נגד הזרם.

נסמן ב־ x את מהירות הזרם בנהר.

א. הביעו באמצעות x את המהירות של סירה I במים עומדים ואת המהירות של סירה II במים עומדים.

סירה I הגיעה לתחנה A לאחר 3 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה B .

סירה II הגיעה לתחנה B לאחר 7 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה A .

ב. **(1)** באיזו שעה נפגשו הסירות?

(2) האם הסירות נפגשו בין תחנה A לתחנה C או בין תחנה B לתחנה C ? נמקו את תשובתכם.

הסירות נפגשו במרחק של 84 ק"מ מתחנה C .

ג. מהי מהירות הזרם בנהר?

2. נתונה סדרה הנדסית אין סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

בונים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בנוגע לכל אחד מן ההיגדים (1)–(2) שלפניכם קבעו אם הוא נכון או לא נכון, ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{3}{5}$.

ג. מצאו את q.

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + ... + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$.

ד. מצאו את n.

3. בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות.

בארגז א' יש a פירות: 3 תפוחים והשאר אגסים.

בארגז ב' יש b פירות: 5 תפוחים והשאר אגסים.

מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'. אם יצא תפוח – מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס – מחזירים אותו לארגז א'.

לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.

א. הביעו באמצעות a ו־b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.

נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$.

ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.

ב. מצאו את a ואת b.

ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.

מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.

ד. מצאו את ההסתברות שב־ 4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח או שבכל 6 הפעמים יצא אגס.

ה. ידוע שב־ 4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר זה.

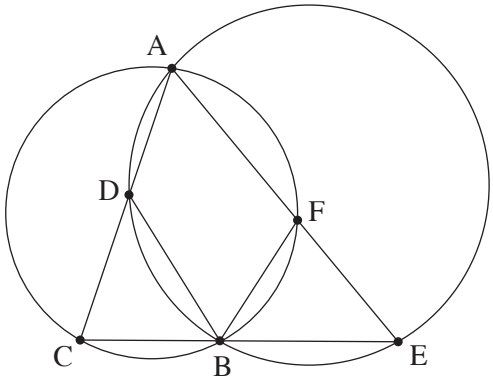
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו־ B (ראו סרטוט).

המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D .

המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F .

הקטע CE עובר דרך הנקודה B .



א. הוכיחו כי $\Delta ACE \sim \Delta BCD$.

נתון: $DC = FE$.

ב. הוכיחו כי $\Delta BFE \cong \Delta BCD$.

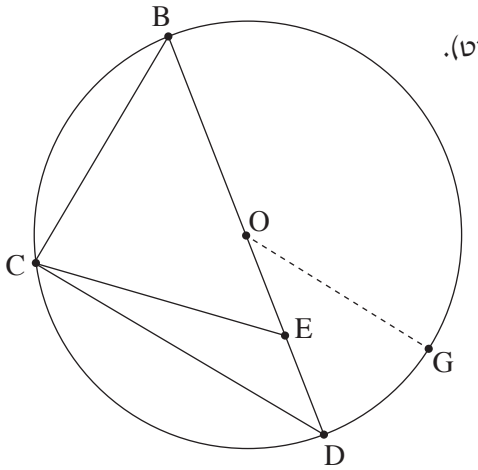
ג. **(1)** הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE .

ד. הוכיחו כי $\sphericalangle DEC = \sphericalangle FCE$.

5. משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R .

הנקודות O ו־ E נמצאות על הצלע BD כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).



נסמן: $CD = m$, $\sphericalangle CDB = \alpha$.

א. הביעו את $\cos\alpha$ באמצעות m ו־ R .

ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 + R^2}$.

נתון: $BC = EC$.

ג. חשבו את α .

מעבירים רדיוס OG המקביל לצלע CD , כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

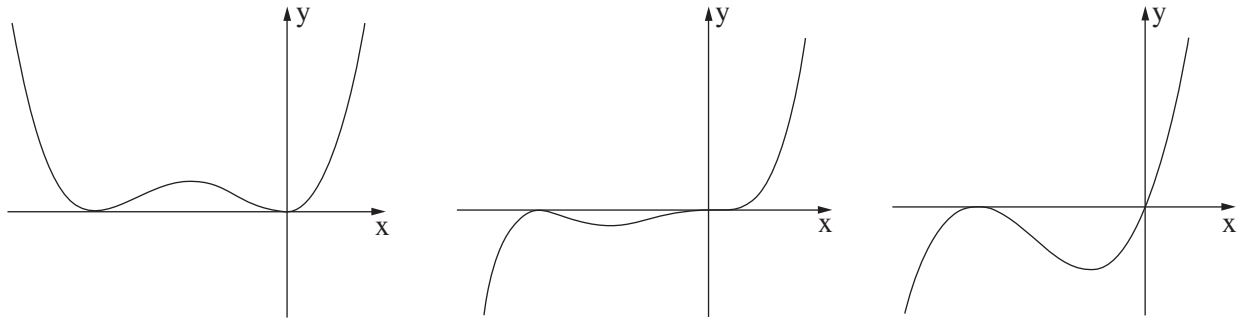
6. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (x+1)^2$, $n > 1$ הוא מספר טבעי. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה). הבחינו בין n זוגי ובין n אי־זוגי.

ג. מצאו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות n , אם יש צורך. הבחינו בין n זוגי ובין n אי־זוגי.

לפניכם שלושה גרפים I–III . אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי־זוגי.



I **II** **III**

ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי־זוגי. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקצייה $g(x) = a \cdot f(x-2)$, a הוא פרמטר חיובי.

נסמן ב־ T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $g(x)$ ובין ציר ה־ x .

ה. הביעו באמצעות a ו־ T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין ציר ה־ x . נמקו את תשובתכם.

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2\sin(x)}{\cos^2(x)-1}$ בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x.

(3) האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

ב. ענו על התת־סעיפים (1)–(2) שלפניכם בעבור התחום $0 \le x \le 2\pi$.

(1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$).

ד. הוכיחו כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה־ x, בתחום $1.7 \le x \le 2$.

8. לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)} \quad , \quad h(x)=\frac{x^3}{x(x+2)} \quad , \quad k(x)=\frac{x^3-1}{x^2(x+2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.

ענו על סעיפים ב–ד עבור הפונקצייה שקבעתם בסעיף א.

ב. **(1)** מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.

נסמן נקודה A על גרף הפונקצייה, שעבורה $x=t$, $-1<t<1$.

מן הנקודה A מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה־ x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקצייה,

כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה־ x.

ד. מצאו את ערכו של t שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

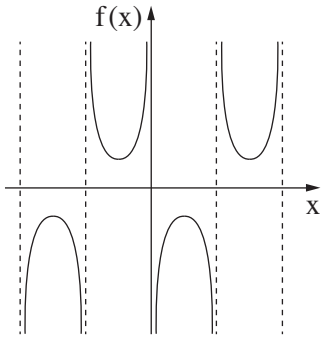
משרד החינוך

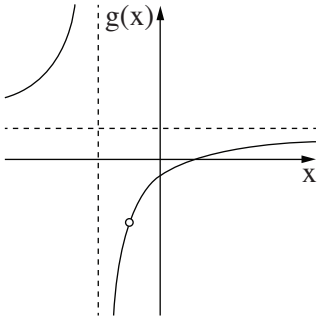
פתרון בחינת הבגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס' 035581, גרסה א, חורף תשפ"ג, 2023

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	$v_I = 5x$
	$v_{II} = 15x$
ב. (1)	בשעה 20:00
(2)	בין תחנה B לתחנה C
ג.	2 קמ"ש
.2	
א.	יש להוכיח
ב. (1)	נכון (יש לנמק)
(2)	לא נכון (יש לנמק)
ג.	$q = \frac{2}{3}$
ד.	$n = 7$
.3	
א.	$\frac{18}{a(b+1)}$
ב.	$a = 10$
	$b = 12$
ג.	$\frac{7}{13}$
ד.	~ 0.173
ה.	$\frac{1}{5}$
.4	
א.	יש להוכיח
ב.	יש להוכיח
ג. (1)	יש להוכיח
(2)	יש להוכיח
ד.	יש להוכיח

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א.	$\cos\alpha = \frac{m}{2R}$
ב.	יש להוכיח
ג.	$\alpha = 37.76^o$
ד.	$\sphericalangle OEG = 115.38^o$
.6	
א.	$(0,0)\ ,\ (-1,0)$
ב.	<u>עבור n זוגי:</u>
	תחום חיוביות:
	$x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x$
	(תחום שליליות: אין)
	<u>עבור n אי־זוגי:</u>
	תחום חיוביות:
	$0 < x$
	תחום שליליות:
	$x < -1,\ -1 < x < 0$
ג.	<u>עבור n זוגי:</u>
	מינימום: $x = -1,\ x = 0$
	מקסימום: $x = -\frac{n}{n+2}$
	<u>עבור n אי־זוגי:</u>
	מקסימום: $x = -1$
	מינימום: $x = -\frac{n}{n+2}$
ד.	<u>עבור n זוגי:</u> גרף III
	<u>עבור $n > 1$ אי־זוגי:</u> גרף II
ה.	$\frac{T}{a}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
7.	
א.(1)	$x \neq -2\pi\ ,\ x \neq -\pi$
	$x \neq 0\ ,\ x \neq \pi\ ,\ x \neq 2\pi$
(2)	$x = -2\pi\ ,\ x = -\pi$
	$x = 0\ ,\ x = \pi\ ,\ x = 2\pi$
(3)	אי־זוגית (יש להוכיח)
ב.(1)	אין נקודות חיתוך עם הצירים
(2)	מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2}\ ,-2\right)$
	מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2}\ ,2\right)$
ג.	
ד.	יש להוכיח
ה.	~ 0.18

מספר השאלה	התשובה הנכונה
8.	
א.	$g(x)$
ב.(1)	$x = -2\ ,\ y = 1$
(2)	$(0\ ,-0.5)\ ,(1\ ,0)$
ג.	
ד.	$t = -2 + \sqrt{3}$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשפ"ב, 2022, **מועד ב**
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה!

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $5\times20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1–8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברת.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. ארבעה רצים משתתפים במרוץ שליחים במסלול שאורכו 1,440 מטר. המסלול מחולק ל־ 4 מקטעים שווים ובתחילת כל מקטע עומד אחד מן הרצים.

כאשר נשמעת יריית הזינוק הרץ הראשון יוצא לדרך. מייד כשהוא מגיע לסוף המקטע הראשון, הרץ השני יוצא לדרך, וכך הלאה עד שהרץ הרביעי מגיע לסוף המקטע שלו.

מהירות הרץ השני גדולה פי 1.5 ממהירות הרץ הראשון. מהירות הרץ השלישי קטנה פי 2 ממהירות הרץ השני, ומהירות הרץ הרביעי שווה למהירות הרץ השלישי. המהירות של כל אחד מן הרצים קבועה לאורך המקטע שלו.

ארבעת הרצים השלימו יחד את המסלול כולו בשלוש דקות ו־ 54 שניות סך הכול.

א. מצאו את מהירות הריצה של כל אחד מן הרצים.

הרץ השלישי והרץ הרביעי התאמנו כדי להגדיל את מהירות הריצה שלהם.

כעבור זמן שוב השתתפו ארבעת הרצים במרוץ שליחים, באותו המסלול. כל אחד מהם רץ באותו מקטע שבו רץ בפעם הקודמת. סך זמן הריצה של הרץ השלישי והרץ הרביעי היה גדול פי 1.5 מִסך זמן הריצה של שני הרצים הראשונים.

הרץ הראשון והרץ השני רצו באותה המהירות שבה רצו בפעם הקודמת.

הרץ השלישי עבר כל 100 מטר ב־ 2.5 שניות פחות מן הרץ הרביעי.

ב. **(1)** מצאו בכמה שניות זמן הריצה של הרץ השלישי קטן מזמן הריצה של הרץ הרביעי.

(2) האם כל אחד משני הרצים האלה, השלישי והרביעי, הגדיל את מהירות הריצה שלו? נמקו את התשובה.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה $10,935 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 1,215$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 5$.

ג. **(1)** קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k .

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין־סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי־זוגיים

כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C .

3. בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר.

בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים.

בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה,

ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $2\frac{2}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה.

נסמן ב־ p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבֵּין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

ג. **(1)** הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא $0 < p < \frac{1}{12}$.

ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה

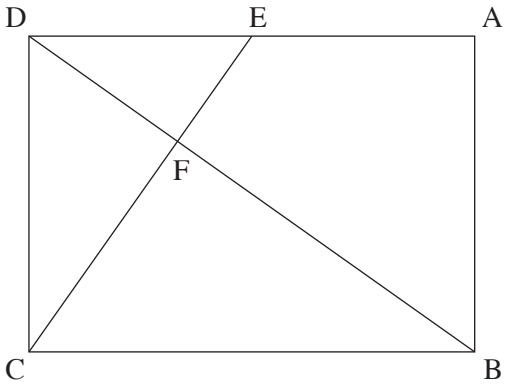
להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. במלבן ABCD , הנקודה E נמצאת על הצלע AD .

הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F .

המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

נתון: $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב־ S .

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו־ BFC באמצעות S .

ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC .

נסמן: $DE = a$.

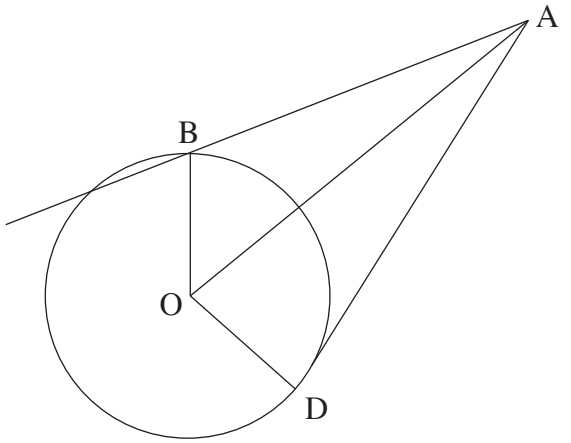
ה. **(1)** הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a .

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a .

5. נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R .

מנקודה A , שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D

וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.



נסמן: $\sphericalangle AOD = \alpha$, $\sphericalangle AOB = \beta$.

א. הביעו באמצעות α , β ו־ R , אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO .

(2) אורך הקטע AB .

נתון: $AB = \sqrt{2}\,R$.

ב. הוכיחו כי $\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r .

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו־ β .

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. **(1)** מצאו את a .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונות הפונקציות $g(x)=-f(x+2)$, $h(x)=|f(x)|$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) האם שיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $g(x)$ גדול משיעור ה־ y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי $\int_{-1}^{3} h(x)\,dx=\int_{-3}^{k} g(x)\,dx$, $k>-3$.

ד. מצאו את k . הסבירו את התשובה.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)-1$, המוגדרת לכל x .

א. האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2\le f(x)\le 0$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(2x)$, המוגדרת לכל x .

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(g'(x)-f'(x)\right)dx=S$.

הביעו באמצעות S את $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}\left(g'(x)-f'(x)\right)dx$. הסבירו את התשובה.

8. נתונה הפונקצייה $f(x)=x^3+4x^2$, המוגדרת לכל x .

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

המשיק חותך את ציר ה־ y בנקודה C .

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה B .

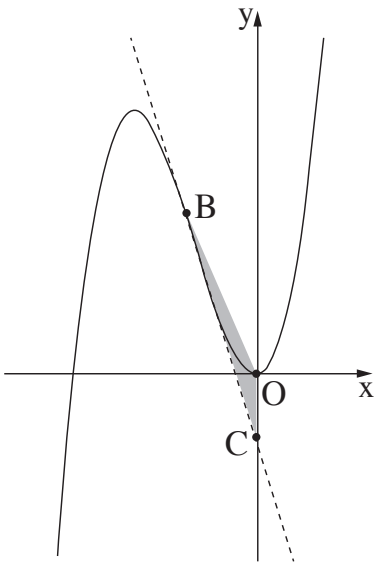
א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה B .

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה־ x .

ב. מהו תחום הערכים של t ?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC .



בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

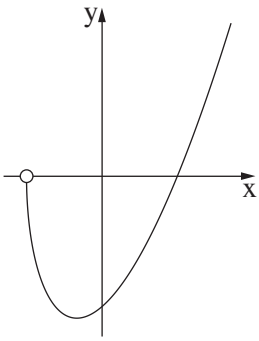
משרד החינוך

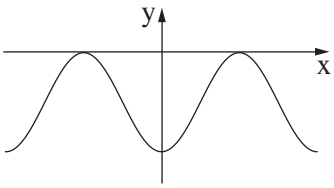
פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, גרסה א, קיץ תשפ"ב, מועד ב

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	מהירות רץ 1: $6\frac{2}{3}$ מטר לשנייה מהירות רץ 2: 10 מטר לשנייה מהירות רץ 3: 5 מטר לשנייה מהירות רץ 4: 5 מטר לשנייה
ב. (1)	9
(2)	רץ 3: הגדיל את המהירות שלו רץ 4: לא הגדיל את המהירות שלו
.2	
א.	להוכיח
ב.	$q_1 = -3\ ,\ q_2 = 3$
ג. (1)	הסדרה עולה
(2)	$k = 4$
ד.	להוכיח
ה.	$S_C = -\frac{3}{20}$
.3	
א.	$\frac{3}{11}$
ב.	$\frac{216}{1331}$
ג. (1)	$1-12p$
(2)	להוכיח
ד.	$\frac{1}{20}$
ה.	תלויים

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	להוכיח
ב.	$\frac{1}{2}$
ג.	$S_{\triangle DFC} = 2S$ $S_{\triangle BFC} = 4S$
ד.	$\sqrt{1.5}$
ה. (1)	$\sqrt{6}\,a$
(2)	$\sqrt{3}\,a$
.5	
א. (1)	$AO = \frac{R}{\cos\alpha}$
(2)	$AB = R\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 1 - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}}$
ב.	להוכיח
ג.	$\alpha = 58.05^o$ $\beta = 47.13^o$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א.	$x > -a$
ב. (1)	$a = 3$
(2)	$(0, -3\sqrt{3})$, $(3, 0)$
(3)	מינימום: $(-1, -4\sqrt{2})$
(4)	
ג. (1)	תחום של $g(x)$: $x > -5$ תחום של $h(x)$: $x > -3$
(2)	שווה
ד.	$k = 1$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.	כן
ב.	להוכיח
ג.	$(0, -2)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
ד.	
ה.	מינימום: $\left(-\frac{\pi}{2}, -2\right)$ מקסימום: $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ מינימום: $(0, -2)$ מקסימום: $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ מינימום: $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$
ו.	$-S$
.8	
א.	$y = (3t^2 + 8t)x - 2t^3 - 4t^2$
ב.	$-2 < t < 0$
ג.	$S_{OBC} = \frac{27}{16}$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשפ"ב, 2022
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם — $5\times20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברת.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

1. מכונית יצאה מבאר שבע לחיפה במהירות קבועה v_1 . באותו הזמן בדיוק יצאה משאית מחיפה לבאר שבע במהירות קבועה v_2 .

המרחק בין חיפה לבאר שבע הוא 210 ק"מ.

המשאית נעצרה בצד הדרך עקב תקלה, לפני שחלפה המכונית על פניה. באותו הזמן המרחק בין המשאית לבין המכונית היה 96 ק"מ.

א. הַביעו באמצעות v_1 ו־v_2 את הזמן שחלף מרגע תחילת הנסיעה ועד שנעצרה המשאית בצד הדרך.

זמן שהִיית המשאית בצד הדרך היה גדול פי 1.5 מן הזמן שחלף מרגע יציאתה מחיפה עד לרגע עצירתה.

המשאית יצאה שוב לדרך באותה המהירות, v_2 , בדיוק ברגע שבו חלפה המכונית על פניה.

ב. מִצאו את היחס בין מהירות המכונית לבין מהירות המשאית.

128 דקות לאחר שיצאה המשאית שוב לדרך, היא הגיעה לבאר שבע.

ג. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

.2 סדרה I היא סדרה הנדסית אין־סופית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ומנתה היא $9 \cdot r^2$.

נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$.

בין כל שני איברים בסדרה I הִכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ומנתה היא q.

א. **(1)** הַביעו את q באמצעות r.

(2) הַסבירו מדוע שתי הסדרות I ו־II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 12.

ג. מִצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב־5 $(b_5, b_{10}, b_{15}, \ldots)$.

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

.3 נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תֵיקו והפסד.

ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.

נסמן ב־p את ההסתברות שנטע <u>תפסיד</u> במשחק $(p > 0)$.

בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.

נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא 4.5p.

א. מִצאו את הערך של p.

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

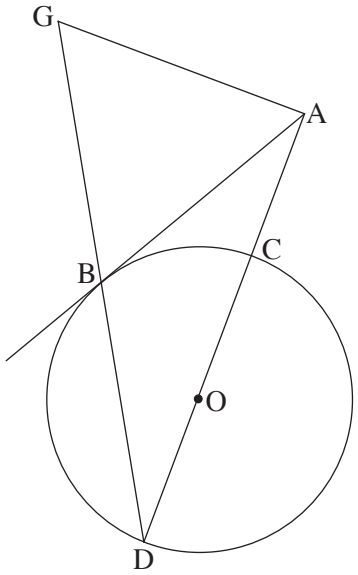
ב. מִצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב־3 משחקים לפחות.

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד. **(1)** מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

פרק שני — גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:

הישר AB משיק למעגל בנקודה B,

הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו־D,

והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).

הנקודות B, D ו־G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\sphericalangle ADB = \alpha$.

א. הַביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α.

ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.

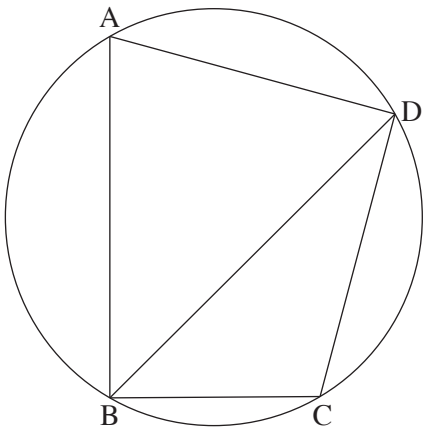
נתון: $AC = \frac{1}{2}DC$, $AG = 8$.

ג. חַשבו את R.

נסמן ב־S את שטח המשולש BDC.

ד. **(1)** הוכיחו: $\Delta ADG \sim \Delta BDC$.

(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.



5. מרובע $ABCD$ חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle DAB = \alpha$, α היא זווית חדה.

א. הַביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו־R.

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חַשבו את α.

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב־h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,

וב־h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

א. **(1)** מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכיחו את התשובה.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

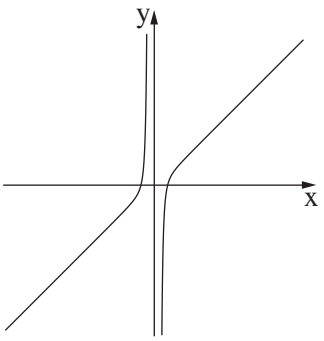
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו־ $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו־ $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

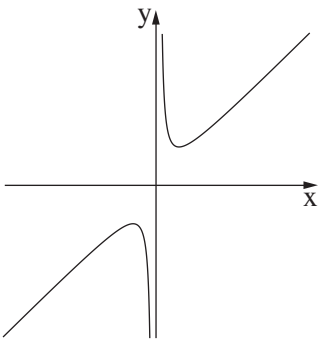
הפונקציות $f'(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $g(x)$.

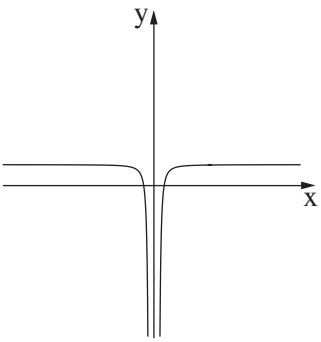
לכל אחת מן הפונקציות כִּתבו איזה גרף מתאר אותה. נַמקו את התשובה.



גרף I



גרף II



גרף III

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{4}$ ו־ $x = 4$.

ה. נתון: $1 < a$ הוא פרמטר. חשבו את $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\,dx$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = \int_{1}^{x} f'(t)\,dt$. נתון כי הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1 \le x$.

ו. מִצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקִבעו את סוגה.

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. **(1)** מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) הסבירו מדוע לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה־ x .

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. **(1)** הַראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ מתקיים: $f'(x)=\cos x-\sin x$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקִבעו את סוגן.

ג. **(1)** סַרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) k הוא מספר. מִצאו את כל ערכי k שבעבורם יש למשוואה $f(x)=k$ פתרון יחיד (בתחום $0\le x\le 2\pi$).

ד. חַשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי שני הישרים $x=\frac{3}{4}\pi$ ו־ $x=\frac{5}{4}\pi$.

8. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. **(1)** מִצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מִצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ x .

נתון כי שיעור ה־ x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך של הפונקצייה $f(x)$ עם הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A . t הוא פרמטר.

ב. הַביעו באמצעות t את אורך הקטע AB .

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB .

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נַמקו את התשובה.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

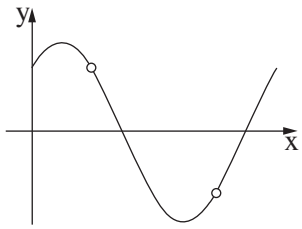
משרד החינוך

פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, גירסה א, קיץ תשפ"ב

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	$t=\frac{114}{v_1+v_2}$
ב.	$\frac{v_1}{v_2}=\frac{32}{25}$
ג.	מהירות המכונית (v_1): 96 קמ"ש מהירות המשאית (v_2): 75 קמ"ש
.2	
א.(1)	$q=3r$
(2)	להסביר
ב.	$q=\frac{1}{3}$
ג.	$S=\frac{48}{121}\approx 0.4$
ד.	2
ה.	להוכיח
.3	
א.	$\frac{1}{6}$
ב.	$\frac{1}{2}$
ג.	$\frac{1}{8}$
ד.(1)	$\frac{3125}{7776}\approx 0.4$
(2)	$\frac{54}{4651}\approx 0.01$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	$\sphericalangle AGB=\sphericalangle ABG=90-\alpha$ $\sphericalangle BAG=2\alpha$
ב.	להוכיח
ג.	$R=\frac{8}{\sqrt{3}}\approx 4.62$
ד.(1)	להוכיח
(2)	$S_{ADG}=3S$
.5	
א.	$BD=2R\sin(\alpha)$
ב.	$\alpha=75^o$
ג.	$\sphericalangle ABD=45^o$
ד.	$\frac{h_1}{h_2}=3+\sqrt{3}\approx 4.73$
.6	
א.(1)	$x\neq 0$
(2)	אי זוגית
(3)	תחומי עלייה: $x<-1\,,1<x$ תחומי ירידה: $-1<x<0\,,0<x<1$
ב.	גרף $f(x)$ – II גרף $f'(x)$ – III גרף $g(x)$ – I
ג.	$(-1,0)\ ,\ (1,0)$
ד.	56.25
ה.	0
ו.	מינימום: $(1,0)$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.(1)	$0 \le x < \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$
(2)	להסביר
(3)	$(0\,,1)\,,\left(\frac{3\pi}{4}\,,0\right),\left(\frac{7\pi}{4}\,,0\right)$
ב.(1)	להראות
(2)	מינימום: $(0\,,1)$ מקסימום: $\left(\frac{\pi}{4}\,,\sqrt{2}\right)$ מינימום: $\left(\frac{5\pi}{4}\,,-\sqrt{2}\right)$ מקסימום: $(2\pi\,,1)$
ג.(1)	
(2)	$k=\sqrt{2}\ ,\ k=-\sqrt{2}\ ,\ k=-1$
ד.	$\sqrt{2}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א.(1)	תחום של $f(x)$: כל x תחום של $g(x)$: $0 \le x$
(2)	$(0\,,0)\,,(1\,,1)$
ב.	$AB = t - t^2$
ג.	$S_{OAB} = \frac{128}{3125} \approx 0.04$
ד.	לא

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

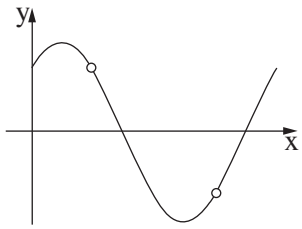
משרד החינוך

פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, גירסה ב, קיץ תשפ"ב

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	$t = \frac{112}{v_1 + v_2}$
ב.	$\frac{v_1}{v_2} = \frac{7}{5}$
ג.	מהירות המכונית (v_1): 98 קמ"ש מהירות המשאית (v_2): 70 קמ"ש
.2	
א. (1)	$q = 3r$
(2)	להסביר
ב.	$q = \frac{1}{3}$
ג.	$S = \frac{60}{121}$
ד.	2
ה.	להוכיח
.3	
א.	$\frac{1}{6}$
ב.	$\frac{1}{2}$
ג.	$\frac{1}{8}$
ד. (1)	$\frac{3125}{7776} \approx 0.4$
(2)	$\frac{54}{4651} \approx 0.01$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	$\sphericalangle AGB = \sphericalangle ABG = 90 - \alpha$ $\sphericalangle BAG = 2\alpha$
ב.	להוכיח
ג.	$R = \frac{7}{\sqrt{3}} \approx 4.04$
ד. (1)	להוכיח
(2)	$S_{ADG} = 3S$
.5	
א.	$BD = 2R\sin(\alpha)$
ב.	$\alpha = 75^o$
ג.	$\sphericalangle ABD = 45^o$
ד.	$\frac{h_1}{h_2} = 3 + \sqrt{3} \approx 4.73$
.6	
א. (1)	$x \neq 0$
(2)	אי זוגית
(3)	תחומי עלייה: $x < -1 , 1 < x$ תחומי ירידה: $-1 < x < 0 , 0 < x < 1$
ב.	$f(x)$ – גרף II $f'(x)$ – גרף III $g(x)$ – גרף I
ג.	$(-1 , 0)$, $(1 , 0)$
ד.	20.25
ה.	0
ו.	מינימום: $(1 , 0)$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.(1)	$0 \le x < \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$
(2)	להסביר
(3)	$(0\,,1)\,,\left(\frac{3\pi}{4}\,,0\right),\left(\frac{7\pi}{4}\,,0\right)$
ב.(1)	להראות
(2)	מינימום: $(0\,,1)$ מקסימום: $\left(\frac{\pi}{4}\,,\sqrt{2}\right)$ מינימום: $\left(\frac{5\pi}{4}\,,-\sqrt{2}\right)$ מקסימום: $(2\pi\,,1)$
ג.(1)	
(2)	$t=\sqrt{2}\ ,\ t=-\sqrt{2}\ ,\ t=-1$
ד.	$\sqrt{2}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א.(1)	תחום של $f(x)$: כל x תחום של $g(x)$: $0 \le x$
(2)	$(0\,,0)\,,(1\,,1)$
ב.	$AB = p - p^2$
ג.	$S_{OAB} = \frac{128}{3125} \approx 0.04$
ד.	לא

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

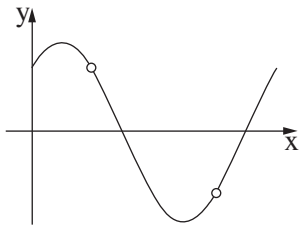
משרד החינוך

פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, גירסה ג, קיץ תשפ"ב

יש לענות על חמש מן השאלות 1–8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	$t = \frac{114}{v_1 + v_2}$
ב.	$\frac{v_2}{v_1} = \frac{32}{25}$
ג.	מהירות המשאית (v_1): 75 קמ"ש מהירות המכונית (v_2): 96 קמ"ש
.2	
א.(1)	$q = 3r$
(2)	להסביר
ב.	$q = \frac{1}{3}$
ג.	$S = \frac{72}{121} \approx 0.6$
ד.	2
ה.	להוכיח
.3	
א.	$\frac{1}{6}$
ב.	$\frac{1}{2}$
ג.	$\frac{1}{8}$
ד.(1)	$\frac{3125}{7776} \approx 0.4$
(2)	$\frac{54}{4651} \approx 0.01$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	$\sphericalangle AGB = \sphericalangle ABG = 90 - \alpha$ $\sphericalangle BAG = 2\alpha$
ב.	להוכיח
ג.	$R = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.89$
ד.(1)	להוכיח
(2)	$S_{ADG} = 3S$
.5	
א.	$BD = 2R\sin(\alpha)$
ב.	$\alpha = 75^o$
ג.	$\sphericalangle ABD = 45^o$
ד.	$\frac{h_1}{h_2} = 3 + \sqrt{3} \approx 4.73$
.6	
א.(1)	$x \neq 0$
(2)	אי זוגית
(3)	תחומי עלייה: $x < -1 , 1 < x$ תחומי ירידה: $-1 < x < 0 , 0 < x < 1$
ב.	גרף – f(x) II גרף – f′(x) III גרף – g(x) I
ג.	$(-1 , 0)$, $(1 , 0)$
ד.	306.25
ה.	0
ו.	מינימום: $(1 , 0)$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.(1)	$0 \le x < \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
	$\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$
(2)	להסביר
(3)	$(0\,,1)\,,\left(\frac{3\pi}{4}\,,0\right),\left(\frac{7\pi}{4}\,,0\right)$
ב.(1)	להראות
(2)	מינימום: $(0\,,1)$
	מקסימום: $\left(\frac{\pi}{4}\,,\sqrt{2}\right)$
	מינימום: $\left(\frac{5\pi}{4}\,,-\sqrt{2}\right)$
	מקסימום: $(2\pi\,,1)$
ג.(1)	
(2)	$a=\sqrt{2}\ ,\ a=-\sqrt{2}\ ,\ a=-1$
ד.	$\sqrt{2}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א.(1)	תחום של $f(x)$: כל x
	תחום של $g(x)$: $0 \le x$
(2)	$(0\,,0)\,,(1\,,1)$
ב.	$AB = c - c^2$
ג.	$S_{OAB} = \frac{128}{3125} \approx 0.04$
ד.	לא

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: **חורף נבצרים**, תשפ"ב 2022
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך – $5\times20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1–8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. בין הבית של תמר ויואב לבין ביתו של דן יש שביל אופניים.

לאורך שביל האופניים, בין שני הבתים, נמצא חדר כושר. המרחק בין חדר הכושר ובין הבית של תמר ויואב הוא 24 ק"מ.

תמר יצאה מן הבית בשעה 6:00 ורכבה על אופניים במהירות קבועה לעבר ביתו של דן.

בשעה 7:00 יצא יואב גם הוא מן הבית ורכב על אופניו לעבר ביתו של דן במהירות שגבוהה ב־ 5 קמ"ש ממהירות הרכיבה של תמר.

בשעה 7:30 יצא דן מחדר הכושר ורכב על אופניו במהירות קבועה לעבר ביתו.

תמר, יואב ודן רכבו שלושתם על אותו שביל אופניים.

תמר השיגה את דן וחלפה על פניו בשעה 8:00 .

יואב ודן הגיעו שניהם לביתו של דן בשעה 9:15 .

א. מצא את המהירות של כל אחד משלושת הרוכבים.

ב. מה היה המרחק בין יואב ובין דן כאשר תמר הגיעה לביתו של דן?

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ ומנתה היא q. כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה $\frac{1}{a_1} , \frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_3} , ...$ היא סדרה הנדסית? הוכח את תשובתך.

ב. **(1)** מסמנים ב־S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי).

הוכח כי לכל n מתקיים: $\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}$

(2) נתון: $a_1 = 1$, $q = 3$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}$.

מצא את n.

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם $b_1 , b_2 , b_3 , ...$.

נסמן ב־T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B. נתון כי m הוא מספר טבעי אי־זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - ... + \frac{1}{a_m}$

קבע אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכח את תשובתך.

/המשך בעמוד 4/

3. כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה.

כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.

הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא.

נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א. **(1)** מצא את n.

(2) מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?

ב. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ג. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמק את תשובתך.

/המשך בעמוד 5/

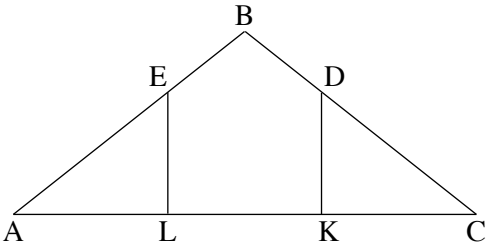
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. בציור שלפניך מתואר משולש שווה־שוקיים ABC , $BA = BC$.

מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K .

מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L .

נתון: $AL = LK = KC$.



א. חשב את $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו־ EK נפגשים בנקודה G .

ב. הוכח כי המרובע $BDGE$ הוא דלתון.

נתון: $AC = 45$.

היקף המרובע $EDKL$ הוא 54 .

ג. חשב את אורך הקטע BG .

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע $BDFE$ הוא בר־חסימה במעגל?

נמק את תשובתך.

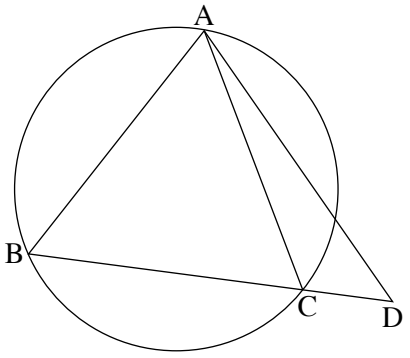
5. בציור שלפניך מתואר משולש שווה־שוקיים ABC , $AB = AC$,

שחסום במעגל שרדיוסו R .

האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה D

לנקודה A .

נתון: $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$.



א. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD

שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .

ב. הבע את שטח משולש ACD באמצעות R ו־ α .

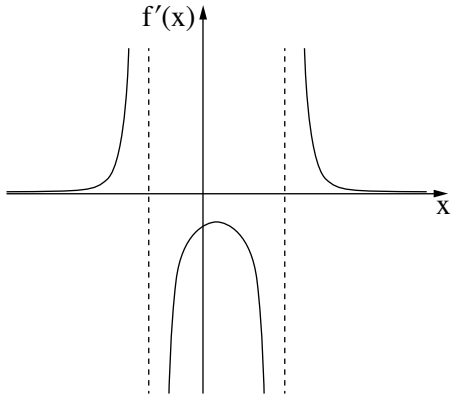
נסמן ב־ m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC .

ג. **(1)** האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמק את תשובתך.

(2) נתון כי $m = 0.6$. מצא את גודלי זוויות המשולש ABC .

/המשך בעמוד 6/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות



6. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x < b$, $b < x < c$, $c < x$ וגזירה בכל תחום הגדרתה.

בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של <u>פונקציית הנגזרת</u> $f'(x)$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $y = 0$, $x = b$, $x = c$.

שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a .

a, b ו־ c הם פרמטרים.

א. הבע את תשובותיך באמצעות a, b ו־ c, אם יש צורך.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a, 0)$.

ב. סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי $f(x) = \dfrac{18 - 36x}{(x^2 - x - 6)^2}$.

ג. מצא את a, b ו־ c .

ד. **(1)** הראה כי בתחום $b < x < c$ מתקיים: $f'(x) \cdot (f(x))^2 \le 0$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x) \cdot (f(x))^2$, על ידי ציר ה־ x

ועל ידי הישרים $x = 0$ ו־ $x = 2a$.

/המשך בעמוד 7/

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \tan(x) + \frac{1}{x}$.

ענה על הסעיפים א–ב בעבור התחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(2.798\,,0)$ בקירוב.

ב. מצא את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x \ne 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית, או לא זוגית ולא אי־זוגית? הוכח את תשובתך.

ד. **(1)** הראה כי בתחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$ שיעור ה־ x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x , וקבע את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

8. חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.

מחֵלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה־צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.

נסמן ב־ x את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות k את תחום ההגדרה של x .

ב. הבע באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל בֵּמעגל שהתקבל.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	חורף תשפ"ב, 2022
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך – $5\times20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/ המשך מעבר לדף /

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1–8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. שלושה שחיינים – איתן, גל ויעקב – מתאמנים בשחייה בבריכה שאורכה 50 מטרים.

כל שחיין מתחיל את שחייתו בתחילת הבריכה, שוחה עד סוף הבריכה, ומייד מסתובב ושוחה חזרה לתחילת הבריכה.

מהירות השחייה של כל אחד מן השחיינים היא קבועה.

ביום א' התחיל כל אחד משלושת השחיינים את שחייתו בזמן אחר.

גל התחיל לשחות 10 שניות אחרי איתן.

יעקב התחיל לשחות 15 שניות אחרי איתן.

15 שניות אחרי שהתחיל יעקב לשחות, עברו כל השחיינים את אותו המרחק מתחילת הבריכה, אך עדיין לא הגיעו לסוף הבריכה.

מייד לאחר שהגיע גל לסוף הבריכה, הוא הסתובב והתחיל לשחות חזרה לתחילת הבריכה. בדרכו חזרה, הוא פגש את איתן במרחק של 4 מטרים מסוף הבריכה.

א. חשב את המהירות של כל אחד משלושת השחיינים.

ב. במרחק של כמה מטרים מסוף הבריכה נפגשו איתן ויעקב בפעם השנייה?

ביום ב' התחילו גל ויעקב את שחייתם באותו זמן בתחילת הבריכה, וכל אחד מהם שחה באותה מהירות שבה שחה ביום א'. כשהגיע כל אחד משני השחיינים לסוף הבריכה, הוא הסתובב מייד ושחה לכיוון תחילת הבריכה, וכשהגיע לשם, הסתובב שוב ושחה לכיוון סוף הבריכה, וחוזר חלילה. שני השחיינים הפסיקו לשחות ברגע שהם נפגשו בתחילת הבריכה.

ג. כמה מטרים שחה יעקב ביום זה?

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם $a_1 , a_2 , a_3 , ...$, והפרשה d .

מסמנים ב־ S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A , לכל n טבעי.

מגדירים סדרה נוספת, B , שאיבריה הם $b_1 , b_2 , b_3 , ...$. איברי הסדרה B מקיימים $b_n = S_{n+1} - S_n$,

לכל n טבעי.

א. **(1)** האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A ? נמק.

מסמנים ב־ T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B , לכל n טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + ... + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d} .$$

נתון: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + ... + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$T_5 = -20$

ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי־זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

3. בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה. ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה.

אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

(1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

(2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

הבע בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.

ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.

חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

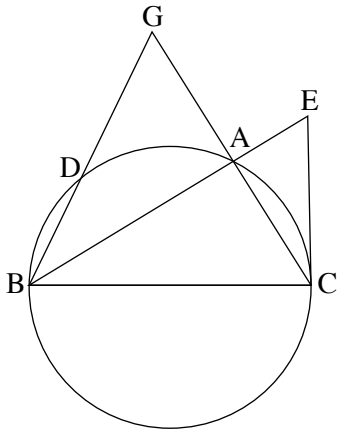
4. משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט).

הצלע BC היא קוטר במעגל.

AG הוא המשך הצלע CA.

הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.

נתון: $GA = AC$.



א. הוכח כי הישר AB חוצה את $\sphericalangle GBC$.

ב. הוכח כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

נתון כי $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

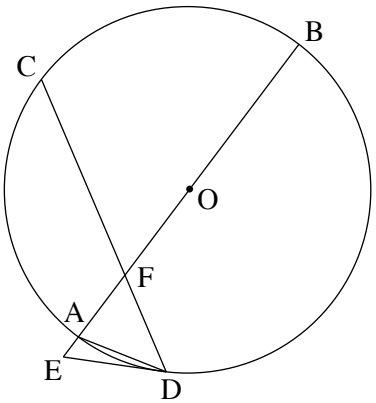
דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.

5. AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O. המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F.

המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$.



א. הראה כי $\sphericalangle BAD = 90^{o} - \alpha$.

נתון כי $ED = FD$.

ב. הבע באמצעות α את גודל $\sphericalangle CDA$.

ג. הבע באמצעות R ו־ α את שטח המשולש AFD.

ד. **(1)** הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$.

מצא את α.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=(-1)$.

ב. מצא את הערך של m .

הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג–ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה־ x .

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של k .

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה־ x .

בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y = 4x + c$ (c פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

8. תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b .

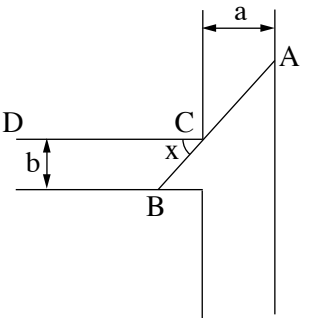
הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית

ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט).

מהנדֶסֶת מתכננת סכר ישר, שיֵצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית,

יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית.

הסכר ייצוֹר זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.



א. הבע באמצעות a , b ו־ x את אורך הסכר AB .

נתון כי $a = 2b$.

ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8 . מצא את b .

בהצלחה!

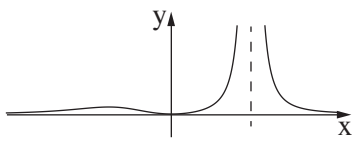
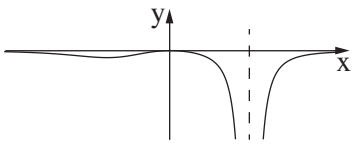
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

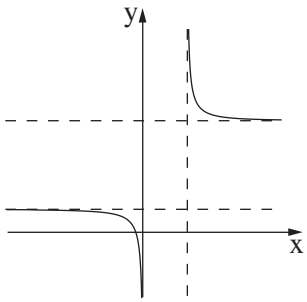
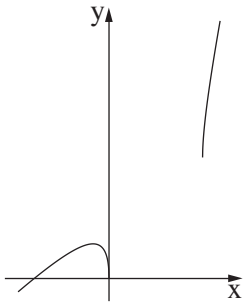
משרד החינוך

פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, חורף תשפ"ב

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
1.	
א.	המהירות של איתן: 1 מטר לשנייה המהירות של גל: 1.5 מטר לשנייה המהירות של יעקב: 2 מטר לשנייה
ב.	$6\frac{2}{3}$ מטר
ג.	400 מטר
2.	
א. (1)	הסדרה חשבונית
(2)	לא
ב.	הוכחה
ג.	$d = 0.5 , b_1 = -5$
ד.	14
3.	
א. (1)	0.366
(2)	$\frac{20}{61} \approx 0.328$
ב.	$1-\left(\frac{2}{5}\right)^n$
ג.	$\frac{8}{625} = 0.0128$
4.	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	$AC = \frac{1}{2}R$
ד.	$\frac{16}{15}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
5.	
א.	להראות
ב.	$\sphericalangle CDA = 3\alpha$
ג.	$S_{AFD} = R^2 \sin(\alpha)\tan(2\alpha)\sin(3\alpha)$
ד. (1)	$\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = \frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)}$
(2)	$\alpha = 15^o$
6.	
א. (1)	$x \neq \sqrt[3]{m}$
(2)	$x = \sqrt[3]{m} , y = 0$
ב.	$m = 2$
ג.	מינימום: $(0 , 0)$
	מקסימום: $\left(-1 , \frac{1}{9}\right)$
ד.	
ה. (1)	
(2)	$k = -18$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.(1)	$x \le 0 , 2 \le x$
(2)	$x < 0 , 2 < x$
(3)	$x = 0 , x = 2$
	$\underbrace{y = 5}_{x \to +\infty} , \underbrace{y = 1}_{x \to -\infty}$
(4)	$(-0.34 , 0)$
(5)	
ב.(1)	מינימום: $(0 , 0) , (2 , 6)$
	מקסימום: $(-0.34 , 0.76)$
(2)	
ג.	לא יתכן

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א.	$AB = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$
ב.	$x \approx 0.67$
ג.	$b \approx 1.92$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

מועד ב

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תשפ"א, 2021, **מועד ב**
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך — $4\times25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה — 25 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

1. נטע, דניאלה ורוני מתאמנות בהליכה ובריצה במסלול AB שאורכו 40 ק"מ.

בשעה 8:00 יצאה נטע מנקודה A והלכה במהירות של 4 קמ"ש לכיוון נקודה B.

בשעה 9:36 יצאה דניאלה מנקודה B ורצה לכיוון נקודה A .

שעתיים לאחר צאתה של נטע, יצאה רוני מנקודה B ורצה במהירות של 12 קמ"ש לכיוון נקודה A .

נטע ורוני נפגשו ולאחר מכן המשיכו בדרכן.

שעה ו־ 36 דקות אחרי שנטע ורוני נפגשו, הגיעה דניאלה לנקודה A .

המהירות של כל אחת מן המתאמנות היא קבועה באימון כולו.

א. באיזו שעה נפגשו נטע ורוני?

ב. מהי מהירות הריצה של דניאלה? נמק את תשובתך.

ג. האם שלוש המתאמנות נפגשו בנקודה אחת לאורך המסלול? נמק את תשובתך.

כל מתאמנת שמגיעה לקצה המסלול מייד מסתובבת וחוזרת לנקודה שממנה היא יצאה.

ד. באיזה מרחק מן הנקודה B נפגשו נטע ורוני בפעם השנייה? נמק את תשובתך.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית a_n, שאיבריה a_1 , a_2 , a_3 , ... , והמנה שלה q .

א. הבע באמצעות a_1 ו־q את ערכי הסכומים שלפניך.

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{40}$.

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + ... + a_{40}$.

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצא את ערכו של q .

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין־סופית b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$.

ג. מצא את המנה של הסדרה b_n .

בונים סדרה הנדסית אין־סופית חדשה: $-\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{b_2}$, $-\frac{1}{b_3}$, $\frac{1}{b_4}$, ...

ד. הבע את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1 .

נתונה הסדרה: b_1 , a_1 , $\frac{1}{a_1}$.

ה. **(1)** האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמק את תשובתך.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמק את תשובתך.

3. בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר.
28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42 .

ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות <u>לא</u> יצליח לעבור את המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור. ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.

(1) חשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.

(2) חשב את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).

מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו־N,

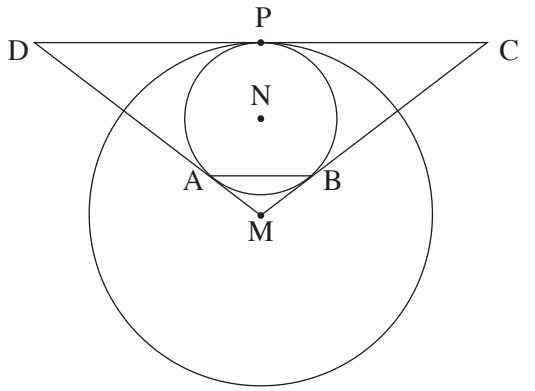
והרדיוסים שלהם הם R_1 ו־R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.

מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.

מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו־B.

ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים

בנקודות C ו־D, כמתואר בסרטוט.



א. הוכח כי $AB \perp MN$.

ב. הוכח כי $AB \parallel DC$.

ג. הוכח כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

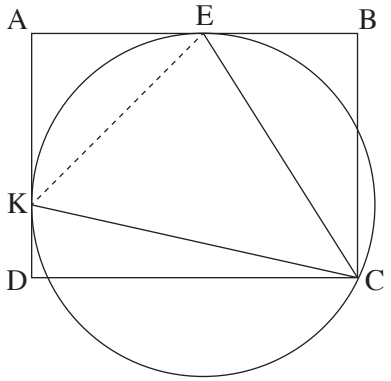
ד. **(1)** מצא את R_1 ואת R_2.

(2) מצא את DC.

5. המרובע $ABCD$ הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו־AD,

משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו־K בהתאמה (ראה סרטוט).

הנקודה C נמצאת על המעגל.



א. הוכח: $\sphericalangle KCE = 45^o$.

נתון: $\sphericalangle KCD = \alpha$, $0^o < \alpha < 45^o$.

ב. **(1)** הבע באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE.

(2) הבע באמצעות R ו־α את האורכים של צלעות המשולש KCE.

ג. הבע באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשב את α.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $(f(x))^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $(f(x))^2$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמך על הסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

הצֵב: $a=2$.

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=3$ ו־ $x=4$.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}+3$.

ענה על הסעיפים שלפניך בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

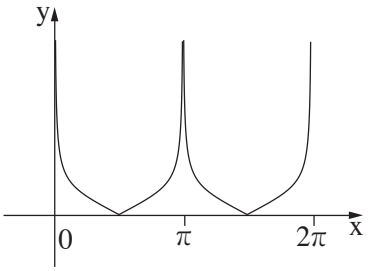
(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

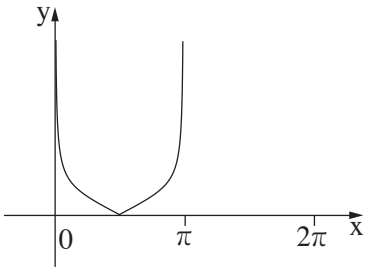
נתונות שתי פונקציות: $k(x)=f(x)-3$, $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$.

ג. אחד מן הגרפים א–ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$.

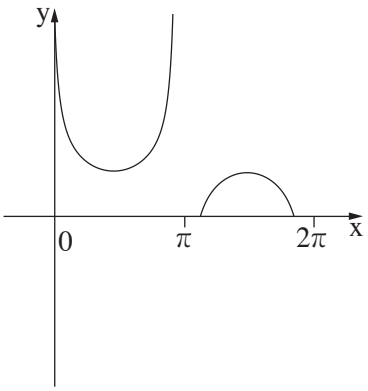
קבע איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות, ונמק את קביעותיך.



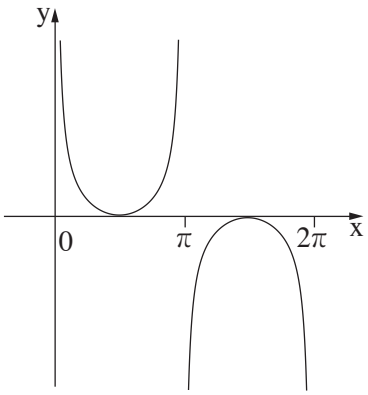
גרף ב



גרף א



גרף ד

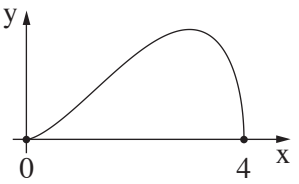


גרף ג

/המשך בעמוד 7/

8. בסרטוט שלפניך מוצגת הפונקציה $f(x)=\sqrt{a\cdot x^4+b\cdot x^3}$.

נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $0\le x\le 4$.



א. **(1)** הוכח כי $b=-4\cdot a$.

(2) לפניך שתי טענות I– II . רק אחת מהן נכונה. קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.

I. $a>0\,,\,b<0$.

II. $a<0\,,\,b>0$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $(f(x))^2$ המוגדרת גם היא בתחום $0\le x\le 4$. מנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה־ x . M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה־ x , ו־ O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה־ x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

ג. בעבור שיעור ה־ x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO .

ד. אם ידוע כי שיעור ה־ x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $(f(x))^2$ <u>אינה</u> יורדת, מהו שיעור ה־ x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

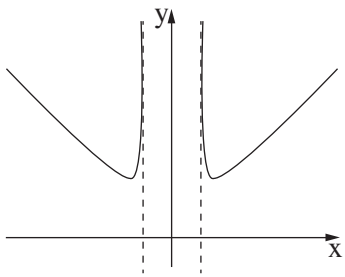
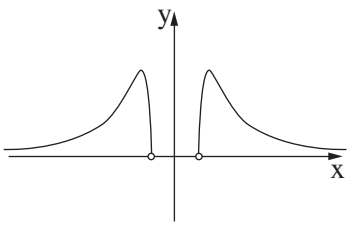
משרד החינוך

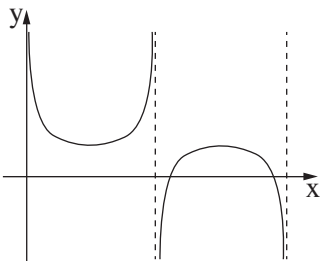
פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, קיץ תשפ"א, מועד ב

יש לענות על ארבע מן השאלות 1-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	12:00
ב.	10 קמ"ש
ג.	כן
ד.	8 ק"מ
.2	
א. (1)	$\frac{a_1 \cdot q(q^{40}-1)}{q^2-1}$
(2)	$\frac{a_1 \cdot q^3(q^{40}-1)}{q^4-1}$
ב.	3
ג.	3
ד.	$-\frac{1}{12a_1}$
ה. (1)	לא
(2)	כן
.3	
א.	0.07
ב.	0.3
ג. (1)	0.027
(2)	0.009

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	הוכחה
ד. (1)	$R_1 = 14 \ , \ R_2 = 6$
(2)	$12\sqrt{7} \approx 31.75$
.5	
א.	הוכחה
ב. (1)	$\sphericalangle EKC = 45^o + \alpha$
	$\sphericalangle KEC = 90^o - \alpha$
(2)	$EK = \sqrt{2}R$
	$EC = 2R\sin(45^o + \alpha)$
	$= \sqrt{2}R(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))$
	$KC = 2R\cos(\alpha)$
ג.	$\cos(2\alpha)$
ד.	22.5^o

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א.	$x < -a \ , \ a < x$
ב.	הוכחה
ג. (1)	אין נקודות חיתוך עם הצירים
(2)	$x = -a \ , \ x = a$
(3)	מינימום: $(-\sqrt{2}a \ , \ 2a)$ $(\sqrt{2}a \ , \ 2a)$
(4)	
ד.	מינימום: $(-\sqrt{2}a \ , \ 4a^2)$ $(\sqrt{2}a \ , \ 4a^2)$
ה.	
ו.	$\frac{71}{1296} \approx 0.0548$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א. (1)	$0 < x < \pi \ , \ \pi < x < 2\pi$
(2)	$x = 0 \ , \ x = \pi \ , \ x = 2\pi$
(3)	תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{2} \ , \ \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi \ , \ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$
(4)	מינימום: $\left(\frac{\pi}{2} , 3\right)$ מקסימום: $\left(\frac{3\pi}{2} , 3\right)$
ב.	
ג.	גרף ג – $k(x)$ גרף א – $g(x)$
.8	
א. (1)	הוכחה
(2)	תשובה II
ב.	3.2
ג.	$-41.9a$
ד.	3

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

מועד מיוחד

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: **מועד מיוחד**, קיץ תשפ"א, 2021
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך – $4\times25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על ארבע מן השאלות 1–8 (לכל שאלה – 25 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. ביום ראשון יצא אודי ברכיבה על אופניים ממטולה לכיוון טבריה. באותה שעה בדיוק יצאה רעות ברכיבה על אופניים מטבריה לכיוון מטולה, ורכבה באותה הדרך. כל אחד מן הרוכבים רכב במהירות קבועה.

כעבור 2 שעות נפגשו שני רוכבי האופניים.

הזמן שנדרש לאודי כדי לעבור את הדרך ממטולה לטבריה גדול ב־ 54 דקות מן הזמן שנדרש לרעות לעבור דרך זו.

א. מצא את היחס בין מהירות הרכיבה של רעות ובין מהירות הרכיבה של אודי.

ב. מצא כמה זמן נדרש לכל אחד מן הרוכבים כדי לעבור את כל הדרך שבין מטולה ובין טבריה.

ביום שני יצאו 2 רוכבי האופניים יחד מטבריה לכיוון מטולה באותו הזמן. הם רכבו באותה הדרך ובאותן המהירויות כמו ביום ראשון. רעות הגיעה למטולה ומייד הסתובבה וחזרה לכיוון טבריה. היא נפגשה עם אודי לאחר שעברה מרחק של 7 ק"מ ממטולה.

ג. מצא את אורך הדרך בין מטולה ובין טבריה.

ד. מצא את המהירות שבה רכב כל אחד משני הרוכבים.

2. נתונה סדרה חשבונית ובה $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).

איברי הסדרה הם $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ והפרש הסדרה הוא d.

א. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים ובין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שווה לאיבר האמצעי בסדרה.

נסמן ב־ T את ההפרש בין סכום האיברים ב־ n המקומות האחרונים ובין סכום האיברים ב־ n המקומות הראשונים.

ב. הבע את T באמצעות d ו־ n.

נתון:

– סכום כל איברי הסדרה שווה לסכום האיברים ב־ $2n$ המקומות האחרונים.

– סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204.

– $T = 3,468$.

ג. מצא כמה איברים יש בסדרה.

/המשך בעמוד 3/

3. בחממה גדולה של פרחים יש אך ורק פרחים לבנים וסגולים.

ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 מן ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים סגולים.

א. חשב את אחוז הפרחים הסגולים בחממת הפרחים.

בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים. לשאר הפרחים יש עלים קטנים.

ירדן בחרה באקראי שני פרחים. ההסתברות שירדן בחרה פרח אחד שיש לו עלים קטנים ופרח אחד שיש לו עלים גדולים היא 0.455 .

ב. **(1)** חשב את אחוז הפרחים בחממה שיש להם עלים גדולים.

(2) חשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול, אם ידוע שרק לאחד מן הפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.

ג. כינרת הכינה זר מ־ 7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה.

חשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים.

/המשך בעמוד 4/

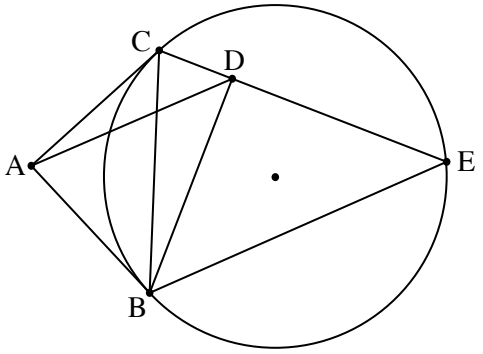
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. מנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגל בנקודות B ו־C (ראה סרטוט).

נתון כי $\sphericalangle CAB = 90^o$.

BE ו־CE הם מיתרים במעגל.

המעגל החוסם את המשולש ABC חותך את המיתר CE בנקודה D .



א. הוכח כי $BD = DE$.

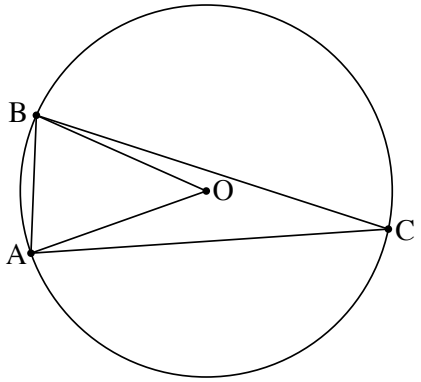
ב. הוכח כי $\Delta ADB \sim \Delta CEB$.

ג. הוכח כי $S_{\Delta CEB} = 2 \cdot S_{\Delta ADB}$.

5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R .

נתון כי $\sphericalangle BAC = 80^o$.

נסמן את הזווית AOB ב־α , ואת הצלע AB ב־k .



א. הוכח כי $\cos\alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$.

נתון כי $k = \frac{3}{4}R$.

ב. הבע באמצעות R (בלבד) את שטח המשולש ABC .

נסמן ב־r את רדיוס המעגל החסום במשולש AOB .

ג. חשב את היחס $\frac{R}{r}$.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $f(k)=1$, $t<k$, t הוא פרמטר.

ג. קבע איזה מן הביטויים שלפניך גדול יותר. נמק את קביעתך.

$$\int_t^k (f(x))^2\,dx \qquad \underline{\text{או}} \qquad \int_t^k f(x)\,dx$$

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=-8$ ו־ $x=-1$.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos(mx) + \cos(2x)$, המוגדרת לכל x . m הוא פרמטר השונה מאפס.

נתון כי בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא -2 .

א. הוכח כי m הוא מספר שלם שמתחלק ב־ 4 ללא שארית.

הצב $m = 4$ וענה על סעיפים ב–ד שלפניך.

ענה על סעיף ב בתחום: $0 \le x \le \pi$.

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ענה על סעיפים ג–ד בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

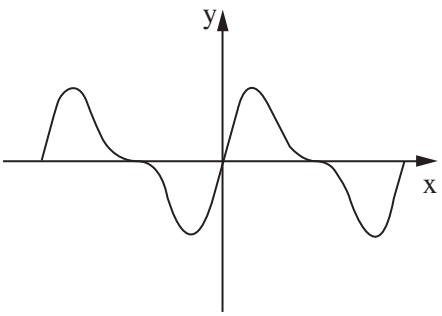
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. הסבר את שיקוליך.

נתונה פונקציה $k(x)$ המקיימת: $k'(x) = f(x)$, $k(0) = 0$.

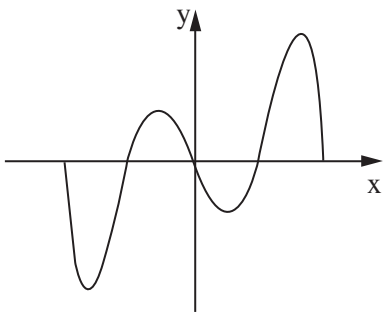
ד. אחד מן הגרפים א–ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$.

היעזר בתשובתך על סעיף ג וקבע איזה מן הגרפים שלפניך מתאים לגרף הפונקציה $k(x)$. נמק את קביעתך.

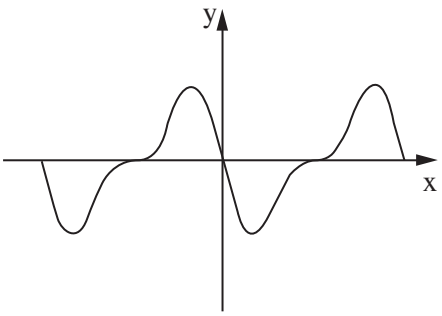
גרף א



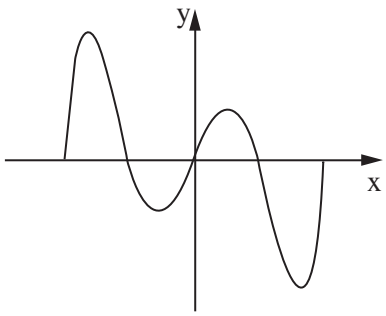
גרף ב



גרף ג



גרף ד



/המשך בעמוד 7/

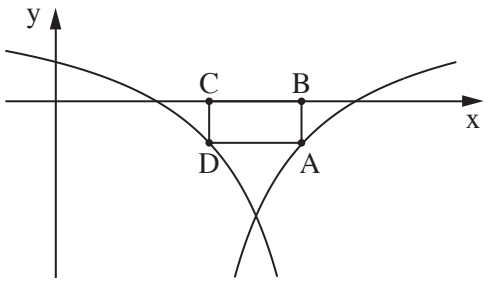
8. נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$, $g(x)=\frac{x-3}{x-1}$.

ענה על סעיף א בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה $f(x)$, חלק מן הגרף של הפונקציה $g(x)$,
ומלבן החסום ביניהם ובין ציר ה־ x .
צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה־ x , והצלע הנגדית, AD , מחברת
בין נקודה על הגרף של $f(x)$ ובין נקודה על הגרף של $g(x)$, כמתואר בסרטוט.



נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A .

ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של t .

ג. **(1)** הבע באמצעות t את אורך הצלע AB .

(2) הוכח ששיעור ה־ x של הנקודה D הוא $4-t$.

(3) הבע באמצעות t את שטח המלבן $ABCD$.

ד. מצא את t שבעבורו שטח המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרון מועד מיוחד יוני 2021

1. א. $\frac{5}{4}$.
ב. רעות: 3.6 שעות, אודי: 4.5 שעות.
ג. 63 ק"מ.
ד. רעות: 17.5 קמ"ש, אודי: 14 קמ"ש.

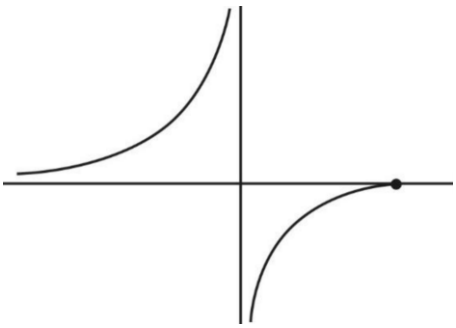
2. א. הוכחה.
ב. $T = n(n+1)d$.
ג. 67.

3. א. 40%.
ב. (1) 35%.
(2) $\frac{8}{13}$.
ג. 0.9748.

4. א. הוכחה.
ב. הוכחה.
ג. הוכחה.

5. א. הוכחה.
ב. $R^2$072.
ג. 3.96.

6. א.(1) $x \le \frac{1}{2}$, $x \ne 0$.
(2) $(\frac{1}{2}, 0)$.
(3) $y = 0, x = 0$.
(4) עליה: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $x < 0$. ירידה: אין.
ב.



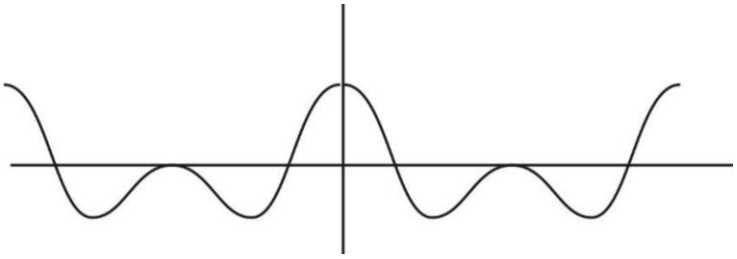
ג. $\int_t^k f(x)dx$ גדול יותר.
ד. $\frac{35}{72}$.

7. א. הוכחה.

ב. (1) $(\frac{\pi}{6},0)$,$(\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{5\pi}{6},0)$, $(0,2)$.

(2) $(0,2)$ מקסימום,$(0.29\pi,-1.12)$ מינימום, $(\frac{\pi}{2},0)$ מקסימום,$(0.71\pi,-1.12)$ מינימום, $(\pi,2)$ מקסימום.

ג.



ד. גרף א.

8. א. (1) $g(x)$; $x \neq 1$: $f(x)$; $x \neq 3$.

(2) $f(x)$: $(1,0)$, $(0,\frac{1}{3})$; $g(x)$: $(3,0)$, $(0,3)$.

ב. $2 < t < 3$.

ג. (1) $\frac{3-t}{t-1}$.

(2) הוכחה.

(3) $\frac{(2t-4)(3-t)}{t-1}$.

ד. $t = 2.41$.

מדינת ישראל
משרד החינוך

מועד קיץ

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תשפ"א, 2021
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון — אלגברה והסתברות
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך — $4\times25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה — 25 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

1. בבית מלון יש שתי מעליות, מעלית א ומעלית ב.

שתי המעליות התחילו לעלות מקומת הקרקע (גובה 0) באותו זמן.

מעלית א עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 14 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים. מעלית ב עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 7 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 81 מטרים.

מעלית א הגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים בדיוק באותו זמן שבו הגיעה מעלית ב לקומה שגובהה 81 מטרים.

לאחר מכן, התחילו שתי המעליות לרדת בדיוק באותו זמן.

מעלית א ירדה 15 מטרים, ובדרכה עצרה עצירת ביניים, שנמשכה 9 שניות.

בזמן שירדה מעלית א, ירדה מעלית ב 63 מטרים ברציפות, ללא עצירות ביניים.

ידוע כי המהירות של כל אחת מן המעליות בעלייה שווה למהירות של כל אחת מהן בירידה. כמו כן ידוע כי המעליות נעות במהירויות קבועות.

א. חשב את המהירות של כל אחת משתי המעליות.

מעלית א הייתה בקומת הקרקע של בית המלון, ואילו מעלית ב הייתה בקומה הנמצאת מעל קומה שגובהה 42 מטרים.

שתי המעליות התחילו לנוע באותו זמן לכיוון הקומה שגובהה 42 מטרים.

מעלית א עלתה לקומה זו מקומת הקרקע ללא עצירות ביניים.

מעלית ב ירדה לקומה זו מן הקומה שבה היא הייתה ובדרכה עצרה עצירת ביניים אחת, שנמשכה 6 שניות.

שתי המעליות הגיעו לקומה שגובהה 42 מטרים בדיוק באותו זמן.

ב. האם מעלית ב הייתה בקומה העליונה של בית המלון כאשר היא התחילה לרדת? נמק את תשובתך.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה, לכל n טבעי, הוא:

$S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n$. $p > 0$, $k > 0$ הם פרמטרים.

א. **(1)** הבע את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות k , p ו־ n , בעבור $n \geq 2$.

(2) הנוסחה שמצאת בתת־סעיף א(1) נכונה בעבור כל n טבעי. הסבר מדוע.

(3) הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית והבע את d , ההפרש של הסדרה, באמצעות k .

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו־ c_n .

מנת הסדרה b_n שווה ל־ d (הפרש הסדרה החשבונית a_n).

הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל־ $\frac{2}{d}$.

נתון: $a_1 = b_1 = c_1$,

$k = 1.5$, $p = 4.5$.

ב. הסבר מדוע הסדרה c_n היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n ובין סכום כל אברי הסדרה האינסופית c_n הוא $40\frac{1}{3}$.

ג. חשב את m .

ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמק את תשובתך.

3. בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים.

בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד.

המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.

נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.

כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחֵר באקראי תלמיד ש<u>לא</u> נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה.

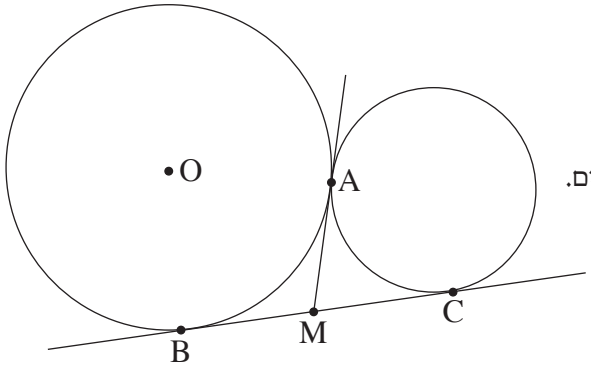
מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה.

מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראה סרטוט).

הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.

מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.

B ו־ C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים.

שני המשיקים נחתכים בנקודה M .

א. הוכח כי הזווית $\sphericalangle BAC$ ישרה.

ב. הוכח כי $4 \cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$

נתון: $AC = 6$, $AB = 8$.

ג. חשב את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O .

ד. חשב את יחס השטחים $\frac{S_{\Delta OBM}}{S_{\Delta AMC}}$.

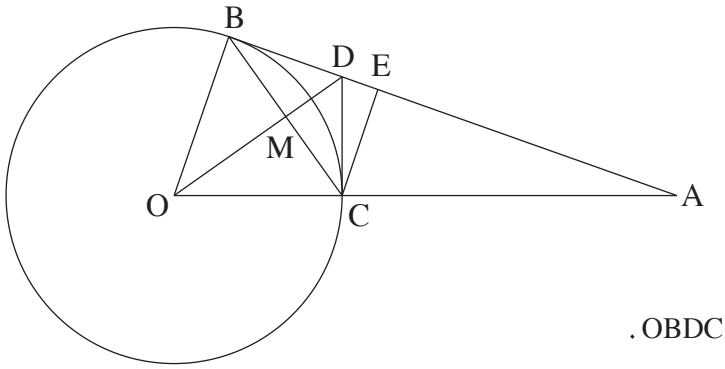
5. DB ו־ DC משיקים למעגל שמרכזו O , כמתואר בסרטוט. רדיוס המעגל: R .

המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A .

הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M .

הקטע CE מאונך ל־ AB .

נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$.



א. הסבר מדוע אפשר לחסום במעגל:

(1) את המרובע OBDC .

(2) את המרובע MDEC .

נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC .

d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC .

d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD .

ב. הבע באמצעות α ו־ R את d_1 , את d_2 ואת d_3 .

ג. מצא את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונות הפונקציות: $g(x)=\frac{x}{(x^2-2)^3}$, $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2}$.

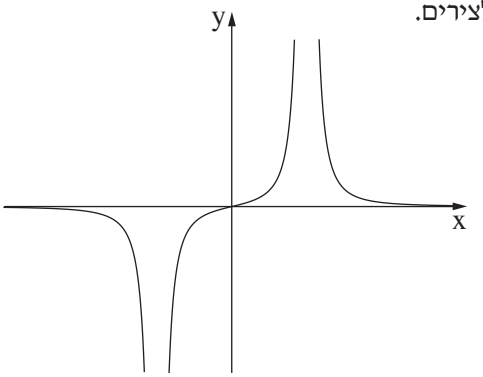
א. ענה על תת־סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה אי־זוגית.



ב. **(1)** הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $g(x)$, $f(x)$.
קבע איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה $h(x)$ שמקיימת: $h'(x)=f(x)$.

$f(x)$ ו־ $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשב את:

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. נמק את תשובתך.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה־ x והישרים $x=-1$, $x=1$.

נתונה הפונקציה $k(x)=f(x)+b$. $b\neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? נמק את תשובתך.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3}$. $a>0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטא את תשובותיך באמצעות a , לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)$ אי־זוגית.

ג. **(1)** מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ה. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו. **(1)** הוסף לסרטוט שבמחברתך סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך.

(2) מהו הערך של a ? נמק את תשובתך.

8. במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a .

נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$ (α ברדיאנים).

נסמן: $\sphericalangle ABC=x$ $(0<x<\pi-\alpha)$.

א. הבע באמצעות a , x ו־ α את היקף המשולש ABC .

ב. הבע באמצעות α את ערך ה־ x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבר מדוע מתקיים המשפט הזה: מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

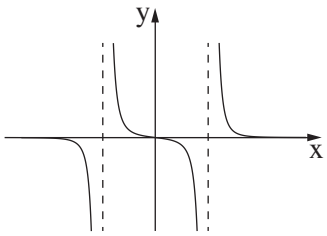
משרד החינוך

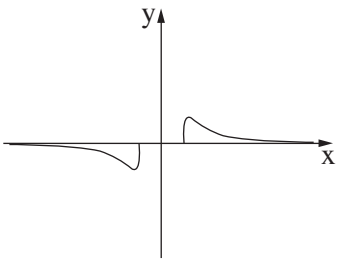
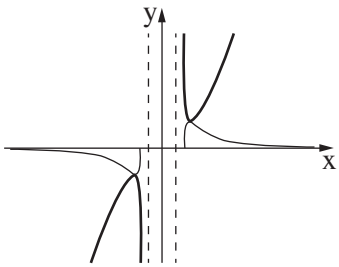
פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, קיץ תשפ"א

יש לענות על ארבע מן השאלות 1-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	מהירות מעלית א: 3 מטר לשנייה מהירות מעלית ב: 4.5 מטר לשנייה
ב.	לא
.2	
א. (1)	$a_n = 2k \cdot n - k - p$
(2)	הסבר
(3)	הסבר, $d = 2k$
ב.	הסבר
ג.	$m = 5$
ד.	הסדרה עולה
.3	
א.	0.38
ב.	0.3369
ג.	0.3404
ד.	0.4

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	$R = 6\frac{2}{3}$
ד.	$\frac{S_{\triangle OBM}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{25}{18}$
.5	
א. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה
ב.	$d_1 = \frac{R}{\cos(\alpha)}$, $d_2 = R \cdot \tan(\alpha)$ $d_3 = \frac{R}{\cos(2\alpha) \cdot \cos(\alpha)}$
ג.	$\alpha = 30^o$

מספר השאלה		התשובה הנכונה
6.		
א.	(1)	$x \neq \pm\sqrt{2}$
	(2)	$x = \pm\sqrt{2} \quad , \quad \underbrace{y=0}_{x\to\pm\infty}$
	(3)	הוכחה
	(4)	הוכחה
ב.	(1)	הגרף מתאר את הפונקציה $f(x)$
	(2)	
ג.		תחומי עלייה: $0 < x < \sqrt{2} \quad , \quad \sqrt{2} < x$ תחומי ירידה: $x < -\sqrt{2} \quad , \quad -\sqrt{2} < x < 0$
ד.	(1)	$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$
	(2)	0.5
ה.		לא זוגית ולא אי־זוגית
7.		
א.		$x \le -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}} \quad , \quad \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}} \le x$
ב.		הוכחה

מספר השאלה		התשובה הנכונה
ג.	(1)	$\left(-\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}, 0\right) \quad , \quad \left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}, 0\right)$
	(2)	מינימום: $\left(-\sqrt{2a}, -\frac{1}{2a}\right)$ מקסימום: $\left(\sqrt{2a}, \frac{1}{2a}\right)$
ד.		
ה.	(1)	$x < -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}} \quad , \quad \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}} < x$
	(2)	$x = -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}} \quad , \quad x = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$
ו.	(1)	
	(2)	$a = \frac{1}{2}$
8.		
א.		$P_{\triangle ABC} = a + a\frac{\sin(x)}{\sin(\alpha)} + a\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin(\alpha)}$
ב.		$x = \frac{\pi - \alpha}{2}$
ג.		הוכחה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

מועד חורף מאוחר

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: **חורף מאוחר**, תשפ"א, 2021
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך — $5\times20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

1. יואב ודני יצאו באותו הזמן לרכוב על אופניים. הם רכבו במסלול ישר שהחל בנקודה A והסתיים בנקודה B .

לאורך המסלול רָכַב כל אחד מהם במהירות קבועה.

יואב הגיע לנקודה B , ומייד חזר באותו המסלול לנקודה A .

כאשר היה יואב בדרכו חזרה מ־ B ל־ A והגיע לאמצע המסלול AB , הגיע דני לנקודה B .

א. מהו היחס בין המהירות של יואב ובין המהירות של דני? נמק.

40 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, כאשר יואב היה בדרכו חזרה מ־ B ל־ A , נפגשו יואב ודני.

ב. הבע את אורך המסלול AB באמצעות המהירות של דני.

30 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, יואב עדיין לא הגיע לנקודה B , והמרחק של דני מן הנקודה A היה גדול ב־ 5 ק"מ מן המרחק של יואב מן הנקודה B .

ג. מצא את אורך המסלול AB .

ד. כמה זמן עבר מרגע יציאתם של יואב ודני מן הנקודה A עד שהמרחק ביניהם היה 2 ק"מ?

מצא שתיים מבין שלוש האפשרויות.

המשך בעמוד 3

2. הסדרה a_n היא סדרה הנדסית המקיימת לכל n טבעי את הכלל: $3a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n=0$.

נתון כי $a_1 \neq 0$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה a_n .

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ולא מתכנסת** ב־ $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ומתכנסת** ב־ $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

ב. הסבר מדוע הסדרה $b_1c_1,\ b_2c_2,\ b_3c_3,\ \ldots$ היא סדרה הנדסית מתכנסת.

נתון: $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3+\ \ldots\ =15$

$b_1=c_1=m$

ג. מצא את m (רשום את שתי האפשרויות).

ענה על סעיף ד בעבור ה־ m הקטן מבין שתי האפשרויות שמצאת בסעיף ג.

ד. נתון: $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_k=1,705$

מצא את k .

3. בכד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: **אדום**, **צהוב**, **כחול**.

נתון:

ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{5}{8}$.

מספר הכדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר הכדורים הכחולים.

$\frac{4}{5}$ מן הכדורים האדומים שבכד ו־ $\frac{8}{9}$ מן הכדורים הצהובים שבכד **מחוספסים**, וכל שאר הכדורים שבכד **חלקים**.

הוציאו באקראי כדור מן הכד והחזירו אותו לכד. את הפעולה הזאת (הוצאה באקראי והחזרה) עשו 8 פעמים.

א. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן הכדורים שהוציאו הם **מחוספסים**?

ענה על סעיף ב בעבור כד שבו 32 כדורים.

ב. הוציאו באקראי בזה אחר זה 2 כדורים מן הכד (ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים?

(2) ידוע ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים. מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה בצבע אדום?

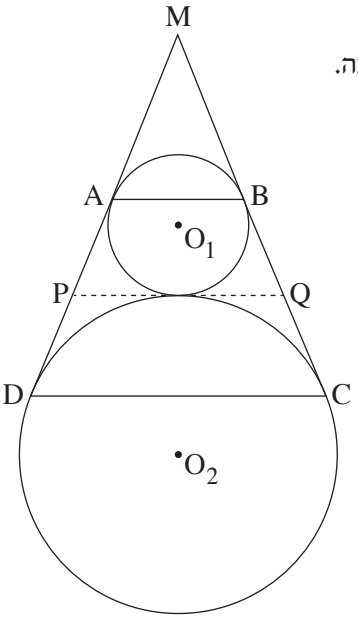
ענה על סעיף ג בעבור כד שבו n כדורים.

נתון: $50<n<100$.

ג. מצא את n (את שתי האפשרויות).

המשך בעמוד 4 ◀

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. בציור שלפניך מתוארים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזי המעגלים הם הנקודות O_1 ו־ O_2 , והרדיוסים שלהם הם R_1 ו־ R_2 בהתאמה.

מן הנקודה M , הנמצאת מחוץ לשני המעגלים,

יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל O_1 בנקודות A ו־ B ,

ולמעגל O_2 בנקודות D ו־ C , כמתואר בציור.

המשיק בנקודה המשותפת לשני המעגלים חותך את הישרים MD ו־ MC

בנקודות P ו־ Q בהתאמה.

א. הוכח כי המרובע $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. הוכח כי PQ שווה לשוק הטרפז $ABCD$.

ג. הוכח כי $\sphericalangle O_1QO_2 = 90^o$.

נתון: $R_1 = 4$, $R_2 = 9$.

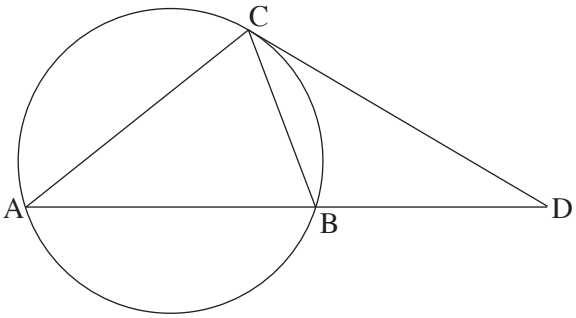
ד. מצא את PQ .

5. בציור שלפניך מתואר משולש חד־זוויות ABC החסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R .

המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך הקטע AB בנקודה D .

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא $2R$.

נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$.



א. הבע את BD באמצעות R ו־ α .

נתון: $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$.

ב. מצא את α .

נתון: שטח המשולש CBD הוא 27 .

ג. מצא את R .

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\cos^3(x)\cdot\sin(x)$ בתחום $0\le x\le\pi$.

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=a\cdot f(x)$. $a>0$ הוא פרמטר.

ג. הבע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=0$.

הישר שמצאת בסעיף **ג** אינו חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה נוספת.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר שמצאת בסעיף **ג** ועל ידי הישר $x=\frac{\pi}{2}$ שווה ל־ $\left(\frac{\pi^2}{2}-1\right)$.

ד. מצא את a .

המשך בעמוד 6

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$. a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. **(1)** בעבור אֵילו ערכים של הפרמטר a אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון? נמק.

(2) במקרים שיש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון, הבע באמצעות a את שיעוריה וקבע את סוגה.

ג. סרטט בנפרד סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ לכל אחד מן התחומים i-iii של הפרמטר a שלפניך:

i $a>0$

ii $a<0$

iii $a=0$

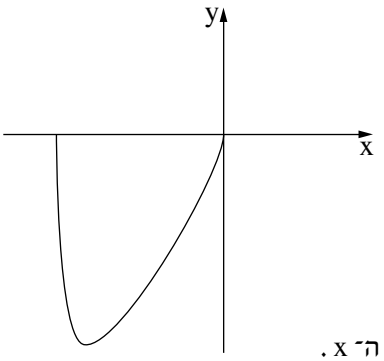
נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-b$. b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

ד. **(1)** מצא את התחום של הפרמטר a . נמק.

(2) הבע את התחום של הפרמטר b באמצעות a . נמק.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=x\cdot\sqrt{a-x^2}$. $a>0$ הוא פרמטר.



א. **(1)** הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא אי־זוגית.

(3) בסרטוט שלפניך מתואר חלק מגרף הפונקציה $f(x)$.
העתק את הסרטוט למחברתך והשלם אותו כך שיתאר
את גרף הפונקציה $f(x)$ כולו.

דרך נקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון מעבירים אנך לציר ה־ x .

האנך חותך את ציר ה־ x בנקודה B .

ישר העובר דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים, O , חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת, C .

דרך הנקודה C מעבירים אנך לציר ה־ x . האנך חותך את ציר ה־ x בנקודה D .

נתון: הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים AOB ו־ COD הוא $4\sqrt{2}$.

ב. מצא את a .

בהצלחה!

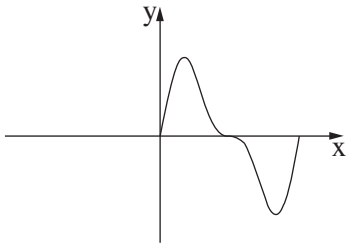
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

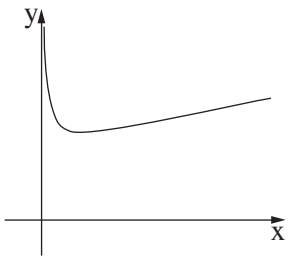
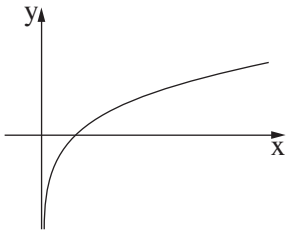
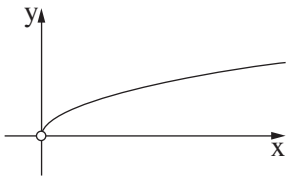
משרד החינוך

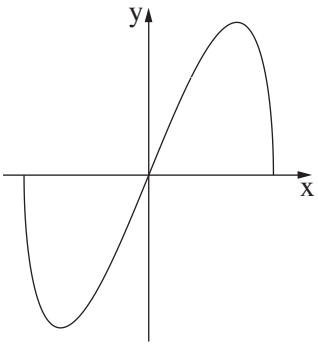
פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, מועד חורף מאוחר, תשפ"א, 2021

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	$\frac{3}{2}$
ב.	$\frac{5v}{6}$
	v — המהירות של דני
ג.	10 ק"מ
ד.	3 האפשרויות:
	20 דקות
	36 דקות
	44 דקות
.2	
א.	$\frac{1}{3}$ או -2
ב.	להסביר
ג.	$m = \pm 5$
ד.	$k = 10$
.3	
א.	$\frac{189}{8,192}$
ב. (1)	$\frac{267}{496}$
(2)	$\frac{40}{89}$
ג.	$n = 64$ או $n = 96$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	הוכחה
ד.	$PQ = 12$
.5	
א.	$2R\sin\alpha\sqrt{5-4\cos\alpha}$
ב.	36.336^{o}
ג.	$R \sim 5.696$
.6	
א.	מינימום:
	$(0,0)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$
	מקסימום:
	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$, $(\pi, 0)$
ב.	
ג.	$y = ax$
ד.	$a = 4$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
7.	
א.	$x > 0$
ב. (1)	$a \le 0$
(2)	$\min(a , 2\sqrt{a})$
ג. i.	
ii.	
iii.	
ד. (1)	$a > 0$ לנמק.
(2)	$b > 2\sqrt{a}$ לנמק.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
8.	
א. (1)	$-\sqrt{a} \le x \le \sqrt{a}$
(2)	להוכיח
(3)	
ב.	$a = 6$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	**חורף נבצרים,** תשפ"א, 2021
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות של חמש שאלות לבחירתך — $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

1. יואב ואודי רכבו על אופניים מיישוב A ליישוב B, באותה הדרך.

יואב יצא מיישוב A, וכעבור 3 שעות הגיע ליישוב B.

זמן מה לאחר יציאתו של יואב מיישוב A, יצא גם אודי מיישוב A והגיע ליישוב B רבע שעה לפני יואב.

יואב ואודי נפגשו בדרך ליישוב B כעבור שעה וחצי מרגע יציאתו של אודי מיישוב A.

מהירות הרכיבה של יואב ומהירות הרכיבה של אודי היו קבועות.

א. מצא כמה זמן עבר מרגע יציאתו של יואב מיישוב A ועד רגע יציאתו של אודי מיישוב A (מצא את שתי האפשרויות).

ב. נתון: יואב ואודי נפגשו במרחק 12 ק"מ מיישוב B.
מהירות הרכיבה של אודי גדולה מ־ 20 קמ"ש.
מצא מהי מהירות הרכיבה של יואב ומהי מהירות הרכיבה של אודי.

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת: $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 4.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה, ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה:

$$a_1 , -a_2 , a_3 , -a_4 , \ldots$$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -2.4.

א. מצא את האיבר הראשון ואת המנה של הסדרה a_n (הסדרה המקורית).

מן האיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{a_2}{a_1^2} , \frac{a_3}{a_2^2} , \frac{a_4}{a_3^2} , \ldots , \frac{a_{n+1}}{a_n^2} , \ldots$

נסמן את הסדרה השלישית ב־ c_n.

ב. הוכח כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית, מצא את המנה שלה ואת c_1.

ג. נתון כי הסכום $c_{k+1} + c_{k+2} + \ldots + c_{3k}$ גדול פי 4,096 מסכום 2k האיברים הראשונים בסדרה c_n.
מצא את k.

/המשך בעמוד 3/

3. בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות.

נמצא כי מספר הלקוחות שצופים בערוצי מוזיקה גדול פִי 1.5 ממספר הלקוחות שאינם צופים בהם.

$\frac{2}{3}$ מן הלקוחות שצופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.

40% מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.

בוחרים באקראי לקוח מן הלקוחות של החברה.

א. מהי ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה גם בערוצי ספורט וגם בערוצי מוזיקה?

ב. נמצא שהלקוח שנבחר צופה בערוצי מוזיקה **או** בערוצי ספורט.

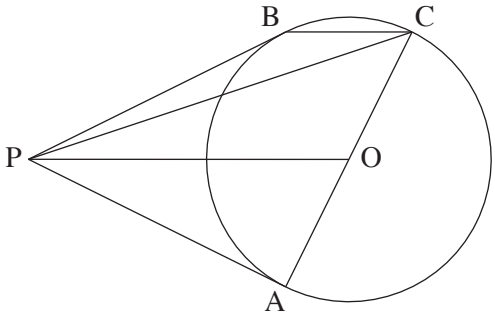
מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי מוזיקה?

ג. מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, בחרו באקראי 4 לקוחות.

מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם צופים בערוצי מוזיקה?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. הנקודות A ו־ B נמצאות על מעגל שמרכזו O .

המשיקים למעגל בנקודות A ו־ B נפגשים בנקודה P .

ההמשך של AO חותך את המעגל בנקודה C (ראה סרטוט).

א. הוכח: $PO \parallel BC$.

נסמן: $k = \frac{PO}{BC}$.

ב. הבע באמצעות k את היחס בין שטח המשולש PBC ובין שטח המשולש OPC .

ג. נסמן ב־ S את שטח המשולש PAO .

הבע באמצעות S וְ־ k את שטח המרובע PACB .

5. ABCD הוא טרפז חסום במעגל $(AB \parallel DC)$.

נתון: $AB = a$, $CD = b$ $(a < b)$.

$\sphericalangle BCD = 60^o$.

א. הבע את האורך של שוקי הטרפז, BC ו־ AD , באמצעות a ו־ b .

נתון: $a = 6$, אורך האלכסון BD הוא $6\sqrt{7}$.

ב. חשב את b .

ג. **(1)** R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R .

(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD .

(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r .

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{x^2-16}}$, $a\neq 0$ הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיפים **ב-ד** בעבור $a>0$.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ המוגדרת בתחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$.

נתון: $a=1$.

ו. **(1)** מצא את תחום השליליות של הפונקציה $g(x)$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x=5$, הישר $x=6$, וציר ה־ x .

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-4$.

ענה על סעיפים **א-ה** בעבור התחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x .

ב. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-f(-x)+b$. b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה־ x .

מצא את b .

ו. מצא בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

8. נתונה הפונקציה $f(x)=1-\frac{2}{x+1}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$, ואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה־ x .

הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הישר $y=\frac{1}{2}x$ בנקודה B .

נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה A ב־ t .

נתון: $t<-1$.

מצא את הערך של t שבעבורו האורך של הקטע AB הוא מינימלי.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	חורף תשפ"א, 2021
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך — $5\times20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

1. שני שליחים, אייל וברק, יצאו בשעה 8:00 זה לקראת זה כדי למסור חבילה. אייל יצא מעיר A וברק יצא מעיר B. לאחר שאייל עבר $\frac{1}{6}$ מן הדרך לכיוון עיר B, הוא גילה כי שכח את החבילה בעיר A. הוא חזר לעיר A, אסף את החבילה, ומייד יצא שוב לכיוון עיר B. אייל נסע כל הזמן במהירות קבועה.

ברק נסע גם הוא במהירות קבועה, הגבוהה ב־ 20% ממהירות הנסיעה של אייל.

ברק ואייל נפגשו בנקודה הנמצאת 75 ק"מ מעיר A.

א. מצא את אורך הדרך שבין שתי הערים.

אייל וברק נסעו בכבישים בין־עירוניים, שמהירות הנסיעה המותרת בהם היא מ־ 50 עד 110 קמ"ש.

גם אייל וגם ברק נסעו בְּמהירות מותרת.

ב. **(1)** האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 9:40 ? נמק.

(2) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 10:00 ? נמק.

המשך בעמוד 3

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית שהמנה שלה היא q .

נתון: $0 < a_1$, $0 < q < 1$.

b_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שהמנה שלה היא r .

נתון: $b_1 = a_6$.

הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n = \frac{a_{n+5}}{b_n}$.

א. הסבר מדוע כל איברי הסדרות a_n , b_n ו־ c_n הם חיוביים.

ב. הוכח כי c_n היא סדרה הנדסית, ומצא את c_1 .

ג. **(1)** הסבר מדוע המנה של הסדרה c_n גדולה מ־ 0 וקטנה מ־ 1 .

(2) נתון: סכום הסדרה c_n הוא $\frac{6}{5}$, $\frac{b_2}{a_8} = 18$.

מצא את q ואת r .

3. ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיה שיער מתולתל היא x .

ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיו עיניים חומות היא $2x$.

ההסתברות שעיניו של ילד שנולד במשפחת לוי יהיו חומות, אם ידוע ששְׂערו מתולתל, קטנה פי 1.5 מן ההסתברות ששערו לא יהיה מתולתל אם ידוע שעיניו חומות.

יונתן הוא אחד הילדים במשפחת לוי.

א. **(1)** הראה שההסתברות שעיניו של יונתן הן חומות ושערו מתולתל היא $\frac{1}{2}x$.

(2) מצא את ההסתברות ששערו של יונתן הוא מתולתל, אם ידוע שעיניו חומות.

ב. **(1)** הבע באמצעות x את ההסתברות ששערו של יונתן אינו מתולתל וגם עיניו אינן חומות.

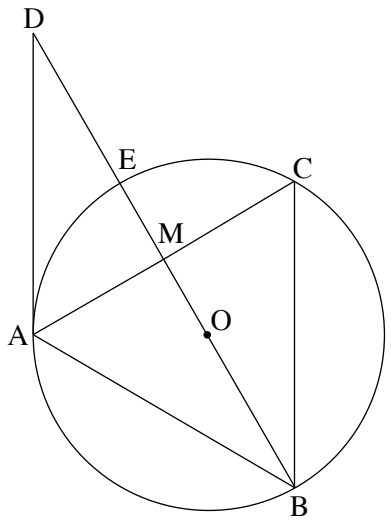
(2) נתון: $x = 0.2$.

במשפחת לוי נולדו ארבעה ילדים בדיוק.

מהי ההסתברות שלפחות לשלושה מארבעת הילדים במשפחת לוי יש שיער מתולתל ועיניים חומות?

המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. הישר AD משיק למעגל בנקודה A .

הנקודה B נמצאת על המעגל כך שהקטע BD עובר דרך מרכז המעגל, O ,

וחותך את המעגל בנקודה נוספת, E .

הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש־ $BC \parallel AD$.

הישרים BD ו־ AC חותכים זה את זה בנקודה M (ראה ציור).

א. הוכח: $AB = AC$.

נתון: AE חוצה את הזווית MAD .

ב. הוכח: $BM \perp AC$.

ג. הוכח כי אורך הקטע AE שווה לרדיוס המעגל.

ד. הוכח כי ABCD הוא מעוין.

5. ABC הוא משולש קהה זווית ($\sphericalangle BAC > 90^o$) .

נתון: $AB + AC = 4a$ (a הוא פרמטר),

$AB : AC = 3 : 5$,

שטח המשולש ABC הוא $\frac{15\sqrt{3}}{16}a^2$.

א. **(1)** חשב את גודל הזווית BAC .

(2) חשב את גודלי הזוויות ABC ו־ ACB .

במעגל החוסם את המשולש ABC אפשר לחסום מחומש משוכלל ששטחו הוא 100 .

ב. חשב את a .

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x(x^3 - 1)^3$, המוגדרת לכל x .

ענה על הסעיפים א-ג. אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. **(1)** מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) בעבור אילו ערכים של k הישר $y = k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$?

ב. נתונה המשוואה $6x(x^3 - 1)^3 = m$. m הוא פרמטר.

הסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$, וקבע בעבור אֵילו ערכי m למשוואה הנתונה יש בדיוק שני פתרונות חיוביים שונים, ובעבור אֵילו ערכי m יש לה פתרון אחד שלילי ופתרון אחד חיובי. נמק את תשובותיך.

ג. היעזר בסרטוט וקבע אם קיים $a > 0$ שבעבורו האינטגרל $\int_0^a f(x)\,dx$ מקבל ערך מינימלי.
אם כן, מהו ערכו של a זה? נמק את תשובתך.

המשך בעמוד 6 ◀

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sin^2 x - 1$, המוגדרת לכל x .

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. **(1)** הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x) = \dfrac{\cos 2x\,(1 - \sin x)}{\sin x - 1}$.

ב. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) בעבור אילו ערכים של x $f(x) = g(x)$? נמק.

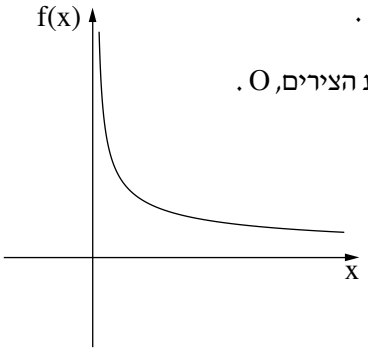
(3) האם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות? נמק.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $h(x) = -f(x) + b$ (b הוא פרמטר), שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: $\int_{-\pi}^{0} h(x)\,dx = \frac{3\pi}{2}$. מצא את ערכו של הפרמטר b .

8. בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$, שתחום הגדרתה הוא $x > 0$.



מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה $f(x)$, הנקודה A היא הקרובה ביותר לראשית הצירים, O .

א. **(1)** מצא את שיעורי הנקודה A .

(2) האם הישר AO מאונך לישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ? נמק.

נתונה הפונקציה $g(x) = -f(-x)$, המוגדרת בתחום $x < 0$.

ענה על סעיף ב בעבור התחום $-4 \le x \le -1$.

ב. **(1)** מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון, מה הם שיעורי הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים?

(2) מצא את שיעורי הנקודה הרחוקה ביותר מראשית הצירים, מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

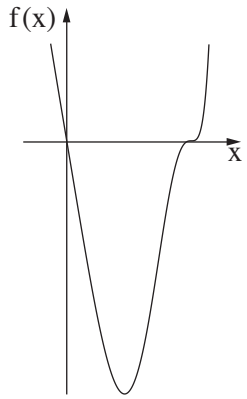
משרד החינוך

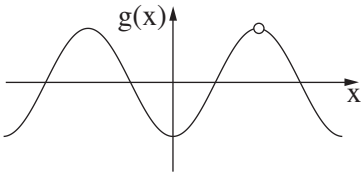
פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, חורף תשפ"א

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	275 ק"מ
ב. (1)	לא
(2)	כן
.2	
א.	להסביר
ב.	הוכחה, 1
ג. (1)	להסביר
(2)	$r = 2\ ,\ q = \frac{1}{3}$
.3	
א. (1)	להראות
(2)	$\frac{1}{4}$
ב. (1)	$1 - 2.5x$
(2)	0.0037

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	הוכחה
ד.	הוכחה
.5	
א. (1)	120°
(2)	$\sphericalangle ABC \approx 38.21^o$ $\sphericalangle ACB \approx 21.79^o$
ב.	~ 3.21

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א.(1)	$(1,0)\ ,\ (0,0)$
(2)	$(\sqrt[3]{0.1}\ ,\ -4.374\cdot\sqrt[3]{0.1})$ מינימום **<u>או</u>** $(\sim 0.46\ ,\sim -2.03)$ מינימום
(3)	
(4)	$\sim -2.03\ ,0$
ב.	בעבור $-2.03\approx -4.374\cdot\sqrt[3]{0.1}<m<0$ יש למשוואה שני פתרונות חיוביים. בעבור $m>0$ יש למשוואה פתרון אחד שלילי ופתרון אחד חיובי.
ג.	כן. $a=1$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א.(1)	להראות
(2)	$(0,-1)\ \left(\pm\frac{\pi}{4},0\right)\ \left(\pm\frac{3\pi}{4},0\right)$
(3)	$(-\pi,-1)$ מינימום $\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$ מקסימום $(0,-1)$ מינימום $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ מקסימום $(\pi,-1)$ מינימום
ב.(1)	$-\pi\le x<\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}<x\le\pi$
(2)	$-\pi\le x<\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}<x\le\pi$
(3)	לא
(4)	
ג.	1.5
.8	
א.(1)	$(2,2\sqrt{2})$
(2)	כן
ב.(1)	$(-2,-2\sqrt{2})$
(2)	$(-4,-2)$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תש"ף, 2020, **מועד ב**
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	— אלגברה והסתברות	— 2×20	— 40 נקודות
פרק שני	— גאומטריה וטריגונומטריה במישור	— 1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	— חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	— 2×20	— 40 נקודות
	סך הכול		— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. טל ואלון הם ספורטאים המשתתפים בתחרות טריאתלון.

התחרות מורכבת משלושה מקצים רצופים: המקצה הראשון הוא שחייה, המקצה השני הוא רכיבה על אופניים ואורכו 180 קילומטרים, והמקצה השלישי הוא ריצה ואורכו 42 קילומטרים.

בפתרון השאלה, הנח שמהירות השחייה, מהירות הרכיבה ומהירות הריצה של כל אחד מן הספורטאים, טל ואלון, הן קבועות לאורך כל אחד מן המקצים.

נתון: טל התחיל את מקצה הריצה בשעה 13:30 ואלון התחיל את מקצה הריצה בשעה 15:00 .

טל הגיע לקו הסיום של הטריאתלון חצי שעה לפני אלון.

מהירות הריצה של אלון גדולה ב־ 1 קמ"ש ממהירות הריצה של טל.

א. באיזו שעה סיים אלון את מקצה הריצה?

באותו היום התחיל אלון את מקצה השחייה בשעה 6:00 וסיים אותו לפני השעה 10:00 .

ב. לפניך שני היגדים I-II . קבע בנוגע לכל אחד מהם אם הוא אפשרי או אינו אפשרי.

I) מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ"ש.

II) מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ"ש.

המשך בעמוד 3

2. בסדרה a_n נתון כי לכל n טבעי, סכום n האיברים הראשונים של הסדרה הוא $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$.

א. **(1)** מצא את a_1 ואת האיבר הכללי של הסדרה a_n בעבור $n > 1$.

(2) הראה כי a_n היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה.

נתונה הסדרה $c_n = S_{n+1} - S_n$.

ב. **(1)** הראה כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית.

(2) הראה כי לכל k טבעי הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה c_n גדול פי 3 מן הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה a_n .

3. יעדי הטיסות של חברת תעופה מסוימת הם היבשות: אירופה, אמריקה ואסיה בלבד (אין טיסות ללא נוסעים).

נתון כי מבין הנוסעים בחברה, מספר הנוסעים לאמריקה הוא $\frac{3}{5}$ ממספר הנוסעים לאירופה.

בוחרים באקראי נוסע מבין הנוסעים בחברה. נסמן ב־ P את ההסתברות שנוסע זה טס לאירופה.

בוחרים באקראי 2 נוסעים מבין הנוסעים בחברה.

נתון כי ההסתברות ש־ 2 הנוסעים שנבחרו אינם טסים לאותה היבשת היא 0.62 .

נתון: $P > 0.4$.

א. מצא את P .

ב. בוחרים באקראי 5 נוסעים מבין הנוסעים בחברה.

מהי ההסתברות שלפחות 2 מן הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה וגם לפחות 2 מהם אינם טסים לאמריקה?

ג. באוטובוס לנמל התעופה היו 50 נוסעים שטסים בחברה זו.

התפלגות יעדי הטיסה של הנוסעים באוטובוס זהה להתפלגות יעדי הטיסה של כל הנוסעים בחברת התעופה.

בחרו באקראי 2 נוסעים מן האוטובוס זה אחר זה (ללא החזרה), והתברר ששניהם טסים לאותה היבשת.

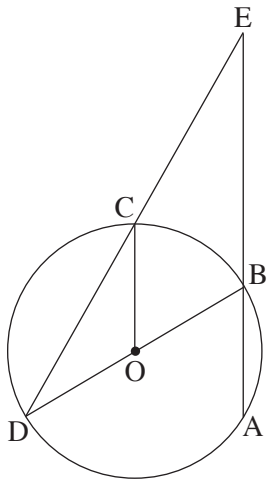
מהי ההסתברות ש־ 2 הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה?

המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O .

הרדיוס OC מקביל למיתר AB , כמתואר בציור.

BD הוא קוטר במעגל.

הנקודה E היא מפגש הישרים AB ו־ DC (ראה ציור).

א. הוכח: $\sphericalangle AED = \sphericalangle CDO$.

ב. הוכח כי CO חוצה את הזווית DCA .

נתון: $\frac{EB}{BA} = 2$.

ג. הוכח כי המשולש ABO הוא שווה צלעות.

ד. נתון: שטח הטרפז COBE הוא 9 .

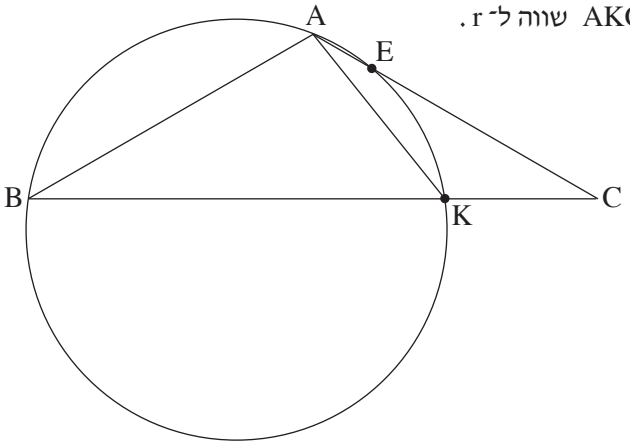
מצא את סכום שטחי המשולשים COD ו־ ABO $(S_{\Delta COD} + S_{\Delta ABO})$.

5. ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$ ששניים

מקודקודיו, A ו־ B , נמצאים על מעגל שרדיוסו r , כמתואר בציור.

המעגל חותך את הצלעות AC ו־ BC בנקודות E ו־ K בהתאמה.

נסמן: $\sphericalangle BAK = \alpha$, $\sphericalangle KAC = \beta$.



א. **(1)** הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKC שווה ל־ r .

(2) הוכח: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{BK}{KC}$.

ידוע: $\sphericalangle ABK > \beta$, נתון: $\alpha + \beta = 120^o$.

ב. הראה כי α היא זווית קהה.

נתון: $AK = 28$, $BK = 55$.

ג. חשב את α ואת אורך הקטע BC .

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = (x+3)^4(2-x)$ המוגדרת לכל x.

א. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$.

ב. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) האם הפונקציה $g(x)$ חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.

(3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. **(1)** הראה כי $f(x) \geq 48$ לכל $-1 \leq x \leq 1$.

(2) הסבר מדוע $\int_2^4 g(x)\,dx \leq \frac{1}{24}$.

המשך בעמוד 6

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2}$. $a\neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות a , והבחן בין $a>0$ ובין $a<0$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) הראה שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(5) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a>0$ וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.

בעבור כל גרף שסרטטת כתוב את התחום המתאים של הפרמטר a .

ג. מצא בעבור אילו ערכים של הפרמטר a גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הישר $y=1$ או משיק לו.

8. המשולש ABC חסום במעגל.

נתון: $AB=1$, $AC=2$.

נסמן: $\sphericalangle BAC=x$.

א. **(1)** הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה ל־ $\frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$.

(2) מצא את הערך של x שבעבורו רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא מינימלי.

ב. מצא את קוטר המעגל בעבור ערך ה־ x שמצאת בסעיף א(2).

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

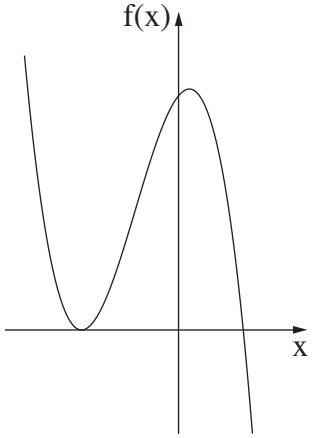
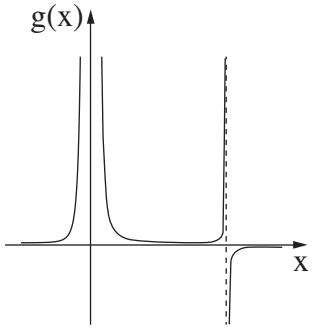
משרד החינוך

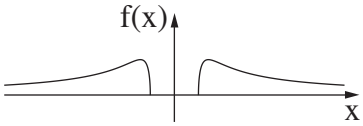
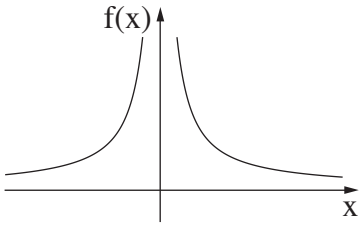
פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, קיץ תש"ף, מועד ב

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	בשעה 21:00
ב. I.	אינו אפשרי
II.	אפשרי
.2	
א. (1)	$a_1 = 4$, בעבור $n > 1$: $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$
(2)	להראות, 3
ב. (1)	להראות
(2)	להראות
.3	
א.	0.5
ב.	0.441
ג.	$\frac{7}{30}$
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	הוכחה
ד.	6

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א. (1)	להראות
(2)	הוכחה
ב.	להראות
ג.	$\alpha \approx 100.84^{o}$
	$BC \approx 73.38$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א. (1)	$(-3,0)$, $(0,162)$, $(2,0)$
(2)	מינימום $(-3,0)$ מקסימום $(1,256)$
(3)	
ב. (1)	$x \neq 0$, $x \neq 5$
(2)	לא
(3)	תחומי העלייה: $x<0\,,\,4<x<5\,,\,5<x$ תחומי הירידה: $0<x<4$
(4)	
ג. (1)	להראות
(2)	להסביר

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א. (1)	בעבור $a>0$: $x \geq \sqrt{a}\,,\,x \leq -\sqrt{a}$ בעבור $a<0$: $x \neq 0$
(2)	בעבור $a>0$: $(\sqrt{a},0)$, $(-\sqrt{a},0)$ בעבור $a<0$: אין נקודות חיתוך עם הצירים
(3)	להראות
(4)	בעבור $a>0$: $y=0$ בעבור $a<0$: $x=0$, $y=0$
(5)	בעבור $a>0$: תחומי העלייה: $\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{2a}$, $x<-\sqrt{2a}$ תחומי הירידה: $\sqrt{2a}<x$, $-\sqrt{2a}<x\leq-\sqrt{a}$ בעבור $a<0$: תחומי העלייה: $x<0$ תחומי הירידה: $x>0$
ב.	בעבור $a>0$:  בעבור $a<0$: 
ג.	$a<0$, $0<a\leq 0.25$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
8.	
א. (1)	להראות
(2)	$\frac{\pi}{3}$
ב.	2

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תש"ף, 2020
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	— אלגברה והסתברות	—	20×2	— 40 נקודות
פרק שני	— גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	— 20 נקודות
פרק שלישי	— חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	— 40 נקודות
	סך הכול			— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. רויטל מתאמנת ברכיבה על אופניים, וזיוה מתאמנת בהליכה ובריצה.

שתיהן יצאו באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B .

רויטל רכבה במהירות קבועה, וזיוה הלכה במהירות קבועה.

רויטל הגיעה לנקודה B כאשר זיוה הגיעה לנקודה C , הנמצאת בין הנקודה A לנקודה B כך ש־ $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{8}$.

א. מהו היחס בין מהירות ההליכה של זיוה למהירות הרכיבה של רויטל? נמק.

מייד לאחר מכן המשיכה זיוה ללכת מהנקודה C לכיוון הנקודה B במהירות ההתחלתית שלה,

ואילו רויטל חזרה ברכיבה מהנקודה B לכיוון הנקודה A במהירות שגבוהה ב־ 3 קמ"ש ממהירותה ההתחלתית.

רויטל וזיוה נפגשו בנקודה D , הנמצאת בין הנקודה C לנקודה B (ראה איור).

נתון: $\frac{CD}{DB}=\frac{6}{19}$.

ב. חשב את המהירות ההתחלתית של רויטל, ואת המהירות ההתחלתית של זיוה.

מייד אחרי שרויטל וזיוה נפגשו בנקודה D , הן יצאו לכיוון הנקודה A : רויטל המשיכה לרכוב באותה המהירות

שבה רכבה לכיוון הנקודה A , ואילו זיוה הגבירה את מהירותה ב־ k קמ"ש (k הוא מספר חיובי).

רויטל הגיעה אל הנקודה A לפני שזיוה הספיקה לעבור את מחצית הדרך מ־ D ל־ A .

ג. מהו תחום הערכים האפשריים בעבור k ? נמק.

/המשך בעמוד 3/

.2 a_n היא סדרה הנדסית בעלת n איברים שהמנה שלה היא q.

כל האיברים בסדרה a_n הם מספרים טבעיים.

נתון: סכום $n-4$ האיברים הראשונים של הסדרה קטן פי 16 מסכום איברי הסדרה החֵל באיבר החמישי (כולל).

א. **(1)** הבע את סכום איברי הסדרה a_n החֵל באיבר החמישי (כולל) באמצעות a_5 ו-n, q.

(2) מצא את מנת הסדרה.

נגדיר סדרה חדשה, b_k, בת $n-2$ איברים, שבה מתקיים: $b_k = a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$ לכל $k \le n-2$.

ב. **(1)** הוכח שהסדרה b_k היא סדרה הנדסית.

(2) הוכח כי כל אחד מאיברי הסדרה b_k מתחלק ב־ 7 ללא שארית.

ג. c_n היא סדרה הנדסית אין־סופית שבה $c_1 = \frac{1}{b_1}$ ו־ $c_2 = \frac{1}{b_2}$.

סכום הסדרה c_n שווה ל־ $\frac{1}{91}$.

חשב את a_1.

.3 בכַד יש 11 כדורים, הממוספרים בסדר עולה, מ־ 1 עד 11.

מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור.

אם המספר שעל הכדור הוא אי־זוגי, מחזירים אותו לכד, ואם הוא זוגי, לא מחזירים אותו.

לאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

א. מהי ההסתברות שנרשמו שני מספרים שמכפלתם זוגית?

ב. ידוע שהמכפלה של שני המספרים שנרשמו היא זוגית.

מצא את ההסתברות שהמספר שעל הכדור הראשון שהוציאו הוא אי־זוגי.

בכד אחר יש מספר זוגי של כדורים הממוספרים בסדר עולה (1, 2, 3 ...).

מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור, מחזירים אותו לכד, ולאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

ג. **(1)** מצא את ההסתברות שמכפלת שני המספרים שנרשמו היא זוגית.

(2) מוציאים מן הכד k כדורים. בכל פעם שמוציאים כדור, רושמים את המספר שעליו ומחזירים אותו לכד.

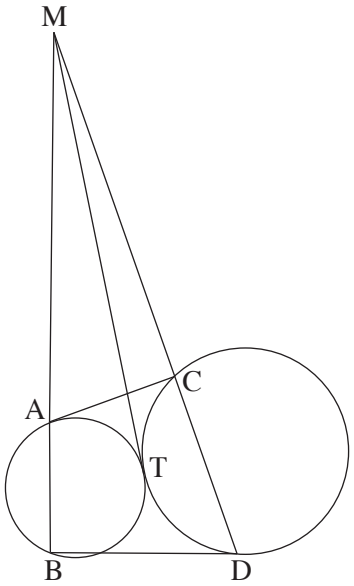
הבע באמצעות k את ההסתברות שמכפלת כל המספרים שנרשמו היא זוגית.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. נתונים שני מעגלים, המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה T .

דרך הנקודה T העבירו משיק המשותף לשני המעגלים.

מן הנקודה M שעל המשיק העבירו שני ישרים

החותכים את המעגלים בנקודות A , B , C ו־ D , כמתואר בציור.

א. **(1)** הוכח: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

(2) הוכח כי המרובע ABDC הוא בר חסימה בְּמעגל.

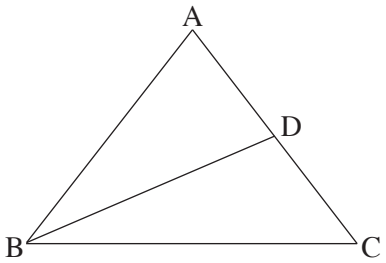
נתון: שטח המשולש MAC שווה לשטח המרובע ABDC .

ב. מצא את היחס $\frac{BD}{AC}$.

נתון: אלכסוני המרובע ABDC מאונכים זה לזה,

AD הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע ABDC .

ג. הוכח כי המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.



5. ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC = a$ (ראה ציור).

BD הוא תיכון במשולש ABC . נתון: $BD = a$.

הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC .

א. הבע את BC באמצעות a .

ב. חשב את זוויות המשולש BMC .

ג. נתון: $AM = 6$.

חשב את שטח המשולש ABC .

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}$. $a>2$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a אם צריך.

א. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

נתון: $f(a+2)=-f(2-a)$.

ב. מצא את a .

הצב $a=5$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. **(1)** מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

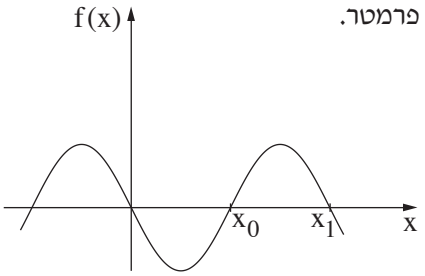
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x+2)$.

/המשך בעמוד 6/

7. לפניך חלק מן הגרף של הפונקציה המחזורית $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בראשית הצירים, וחותך את ציר ה־ x גם בנקודות שבהן $x = x_0$ ו־ $x = x_1$, כמתואר בציור.



אחת המשוואות שלפניך (I - IV) מתארת את הפונקציה $f(x)$. $a \neq 0$ הוא פרמטר.

I. $y = a^2 \sin x$

II. $y = a \sin 2x$

III. $y = a^2 \cos x$

IV. $y = a \cos 2x$

א. **(1)** קבע איזו מן המשוואות I - IV היא משוואת הפונקציה $f(x)$. נמק.

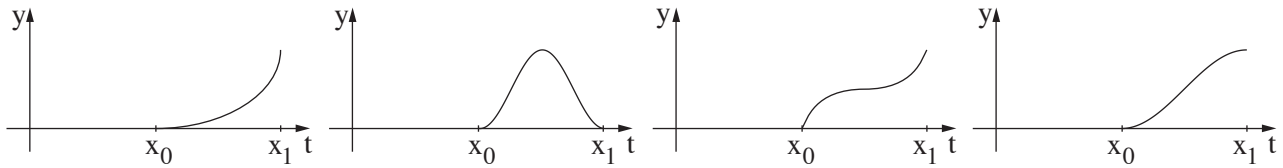
(2) קבע מהו תחום הערכים האפשריים עבור הפרמטר a . נמק.

(3) מה הם הערכים של x_0 ושל x_1 ?

ב. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $x_0 \le x \le x_1$.

נסמן: $S(t) = \int_{x_0}^{t} f(x)\,dx$. נתון: $x_0 \le t \le x_1$.

ג. לפניך ארבעה גרפים (I - IV). איזה מן הגרפים I - IV מתאר את הפונקציה $S(t)$? נמק.



I II III IV

/המשך בעמוד 7/

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x+2}$.

א. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית? נמק.

נתונה הפונקציה $g(x)=x^3-21x+20$.

ב. **(1)** עבור אילו ערכים של x $f(x)=g(x)$? נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x הן $(4,0)$, $(1,0)$ ו־ $(-5,0)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. $t>0$ הוא פרמטר.

עבור איזה ערך של t הביטוי $\int_0^t f(x)\,dx$ מקבל ערך מינימלי? נמק.

בהצלחה!

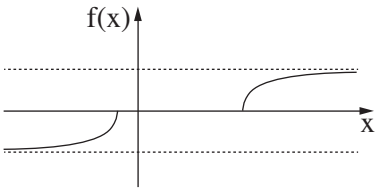
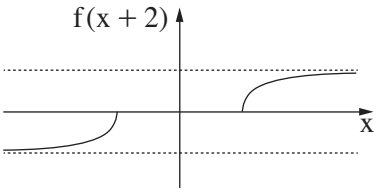
זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

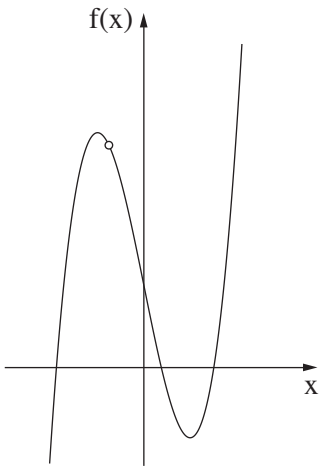
פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, קיץ תש"ף

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	$\frac{3}{8}$
ב.	המהירות ההתחלתית של זיוה: 6 קמ"ש המהירות ההתחלתית של רויטל: 16 קמ"ש
ג.	$0 < k < 3.5$ קמ"ש / קמ"ש
.2	
א. (1)	$\frac{a_5\left(q^{n-4}-1\right)}{q-1}$
(2)	2
ב. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה
ג.	26
.3	
א.	$\frac{85}{121} \approx 0.70$
ב.	$\frac{6}{17} \approx 0.35$
ג. (1)	$\frac{3}{4}$
(2)	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$
.4	
א. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה
ב.	$\sqrt{2}$
ג.	הוכחה

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א.	$\sqrt{1.5} \cdot a$
ב.	$\sphericalangle BMC \approx 133.43^o$ $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB \approx 23.28^o$
ג.	~ 62.74
.6	
א. (1)	$x \le -1 \quad , \quad a \le x$
(2)	$(a\,,0) \quad , \quad (-1\,,0)$
(3)	$\underset{x \to -\infty}{y=-1} \;,\; \underset{x \to \infty}{y=1}$
ב.	5
ג. (1)	תחומי העלייה: $x < -1 \;,\; 5 < x$ אין תחומי ירידה.
(2)	
ד.	

משרד החינוך

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א. (1)	II
(2)	$a < 0$
(3)	$x_1 = \pi \quad , \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$
ב.	$-a$
ג.	I
.8	
א. (1)	$x \neq -2$
(2)	לא
ב. (1)	עבור כל $x \neq -2$
(2)	מקסימום $(-\sqrt{7}\ , \sim 57.04)$ מינימום $(\sqrt{7}\ , \sim -17.04)$
ג.	
ד.	4

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: חורף תש"ף, 2020
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	— אלגברה והסתברות	— 2×20	— 40 נקודות
פרק שני	— גאומטריה וטריגונומטריה במישור	— 1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	— חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	— 2×20	— 40 נקודות
	סך הכול		— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. המרחק בין עיר א' ובין עיר ב' הוא 96 ק"מ.

מכונית ומשאית יצאו באותו הזמן מעיר א' ונסעו לכיוון עיר ב'.

בתחילה נסעה המכונית במהירות קבועה של V_1 קמ"ש.

לאחר שעברה 15 ק"מ מן הדרך, היא עצרה בצד הדרך למשך חצי שעה, לצורך תיקון תקלה.

לאחר שתוקנה התקלה, המשיכה המכונית בדרכה במהירות קבועה של 90 קמ"ש.

המשאית נסעה כל הדרך במהירות קבועה של V_2 קמ"ש.

היא חלפה על פני המכונית 3 דקות לאחר שהמכונית עצרה בצד הדרך.

המכונית והמשאית הגיעו לעיר ב' באותו הזמן.

א. מצא את V_1 ואת V_2 .

ב. כמה זמן אחרי שהמכונית והמשאית יצאו לדרך היה המרחק ביניהן 3 ק"מ? (מצא שניים משלושת המקרים).

המשך בעמוד 3 ◀

2. a_n היא סדרה חשבונית.

k ו־ p הם מספרים טבעיים. $k < p$.

נתון: $a_k = p$, $a_p = k$.

א. **(1)** הוכח שהפרש הסדרה a_n הוא -1 .

(2) הבע את a_1 באמצעות k ו־ p .

הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n = a_n - n$.

נתון כי סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה c_n הוא 0 .

ב. **(1)** מצא את a_1 .

(2) מה הם ערכי k ו־ p ? מצא את כל האפשרויות.

ג. חשב את הסכום $(c_1 - c_2)^2 + (c_3 - c_4)^2 + ... + (c_{99} - c_{100})^2$. נמק.

3. בקופסה יש 12 כדורים. רובם כחולים והשאר אדומים.

הוציאו באקראי כדור מן הקופסה, החזירו אותו לקופסה, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו.

ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$.

א. מצא כמה כדורים כחולים יש בקופסה.

ב. הוסיפו לקופסה כדורים צהובים.

לאחר ההוספה הוציאו באקראי כדור, החזירו אותו, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו.

ההסתברות שהוציאו שני כדורים בצבעים שונים נשארה $\frac{4}{9}$.

כמה כדורים צהובים הוסיפו לקופסה?

העבירו את כל הכדורים הצהובים לכלי אחר והשאירו בקופסה רק את הכדורים הכחולים והאדומים.

ג. הוציאו באקראי מן הקופסה כדור אחרי כדור שוב ושוב (ללא החזרה), עד שהוציאו כדור אדום.

מהי ההסתברות שמספר ההוצאות היה גדול מ־ 3 ?

המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. AD ו־CE הם חוצי זווית במשולש ABC , ונקודת החיתוך שלהם היא F .

נתון: $\sphericalangle ABC = 60^o$.

א. הוכח כי אפשר לחסום את המרובע BDFE במעגל.

נתון: FB הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע BDFE .

ב. הוכח שהמשולש ABC הוא משולש שווה צלעות.

המשך הקטע BF חותך את הצלע AC בנקודה G .

ג. הוכח כי הקטע FG שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המרובע BDFE .

בנקודה F מעבירים משיק למעגל החוסם את המרובע BDFE .

המשיק חותך את הצלעות BA ו־BC בנקודות K ו־L בהתאמה.

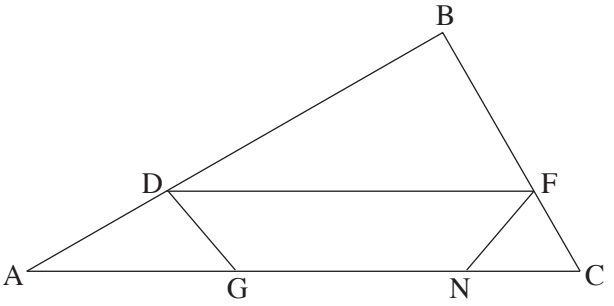
ד. מצא את היחס $\frac{KL}{AC}$. נמק את תשובתך.

5. במשולש ABC הנקודות D ו־F נמצאות על הצלעות BA ו־BC בהתאמה כך ש־ $DF \parallel AC$.

הנקודות G ו־N נמצאות על הצלע AC כך שהמרובע DFNG הוא טרפז שווה שוקיים, כמתואר בציור.

נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FNC = \beta$.

נתון: $AD = 7$, $FC = 4$, $\sphericalangle FCN = 2\alpha$.



א. **(1)** הראה כי: $\frac{FN}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin\beta}$.

(2) חשב את α .

נתון: שטח המשולש BDF הוא 56 .

ב. מצא את אורך הקטע DF .

ג. מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש FCN ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש DAG ? נמק.

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{6}{2\cos^2 x-5\cos x-3}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום הנתון.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)=\left|f(x)+2\right|$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

(2) k הוא פרמטר. מצא את כל הערכים של k שבעבורם הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ בארבע נקודות שונות.

נתונה הפונקציה $g(x)=\left|f(x)\right|+2$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. האם לכל x בתחום ההגדרה $h(x)<g(x)$? נמק.

המשך בעמוד 6 ◀

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3x}{4x^2-1}$ שתחום הגדרתה הוא $x\neq\pm\frac{1}{2}$.

א. **(1)** מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{\frac{3x}{4x^2-1}}$.

ב. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת. שיעור ה־ x של נקודה זו קטן מאפס.

ג. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $g'(x)$.

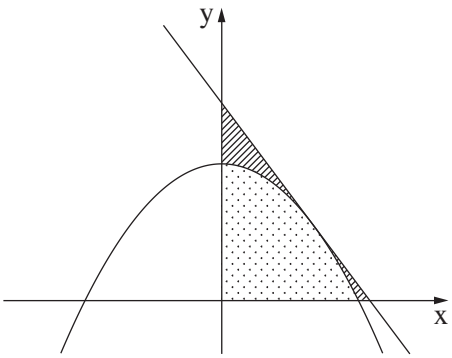
ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2-1}}$?

8. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+1$.

t הוא פרמטר. נתון: $0<t<1$.

בנקודה שבה $x=t$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ (ראה ציור).

א. הראה כי משוואת המשיק היא $y=-2tx+t^2+1$.



נסמן ב־ S את השטח המקווקו בציור (השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי הצירים).

ב. מצא בעבור איזה ערך של t השטח S הוא מינימלי.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

נסמן ב־ A את השטח המנוקד (השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים).

ג. קבע בעבור כל אחת משתי הטענות שלפניך (i - ii) אם היא נכונה או לא נכונה. נמק את תשובתך.

i) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מקסימלי.

ii) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מינימלי.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, חורף תש"ף

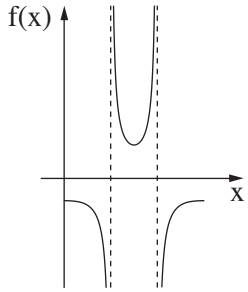
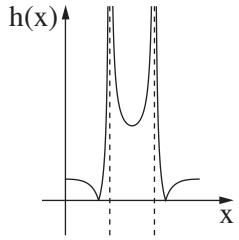
יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

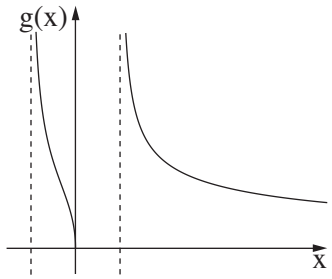
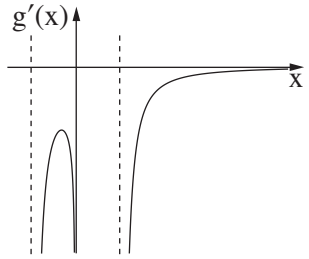
יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
1.	
א.	$V_2 = 60$, $V_1 = 75$
ב.	אחרי 12 דקות, אחרי 18 דקות ואחרי שעה וחצי (יש למצוא רק שניים משלושת המקרים).
2.	
א. (1)	הוכחה
(2)	$k + p - 1$
ב. (1)	6
(2)	שלוש האפשרויות הן: $p = 6$, $k = 1$ $p = 5$, $k = 2$ $p = 4$, $k = 3$
ג.	200
3.	
א.	8
ב.	30
ג.	$\frac{14}{55}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
4.	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	הוכחה
ד.	$\frac{2}{3}$
5.	
א. (1)	להראות
(2)	$\sim 28.96^{o}$
ב.	~ 16.51
ג.	$\frac{4}{7}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א. (1)	$x \neq \frac{2\pi}{3}$, $x \neq \frac{4\pi}{3}$
(2)	מקסימום $(0 , -1)$
	מינימום $(\pi , 1.5)$
	מקסימום $(2\pi , -1)$
(3)	
ב. (1)	
(2)	$0 < k \leq 1$, $3.5 < k$
ג.	לא

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א. (1)	אין תחומי עלייה
	תחומי הירידה:
	$x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x$
(2)	תחומי החיוביות:
	$-\frac{1}{2} < x < 0$, $\frac{1}{2} < x$
	תחומי השליליות:
	$x < -\frac{1}{2}$, $0 < x < \frac{1}{2}$
ב. (1)	$-\frac{1}{2} < x \leq 0$, $\frac{1}{2} < x$
(2)	$y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ (כאשר $x \to \infty$)
ג. (1)	
(2)	
ד.	$\frac{1}{2} < x$
.8	
א.	להראות
ב.	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
ג. i)	נכונה
ii)	לא נכונה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תשע"ט, 2019, **מועד ב**
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	— אלגברה והסתברות	— 2×20	— 40 נקודות
פרק שני	— גאומטריה וטריגונומטריה במישור	— 1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	— חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	— 2×20	— 40 נקודות
		סה"כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

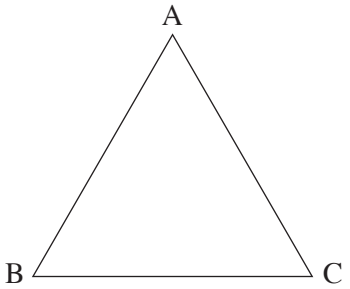
שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. בציור שלפניך מתואר מסלול לרכיבה באופניים בצורת משולש שווה צלעות ABC , שאורך צלעו a מטר.



ביום מסוים יצאו שני רוכבי אופניים באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B .

הם רכבו לאותו הכיוון לאורך המסלול המשולש.

כל אחד מהם רכב במהירות קבועה. המהירות של רוכב **א** גדולה ב־ 2 מטרים לשנייה מן המהירות של רוכב **ב**.

כאשר הגיע רוכב **א** אל הנקודה A לאחר שהשלים פעמיים את המסלול המשולש, הגיע רוכב **ב** אל הנקודה B בפעם השנייה.

א. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים.

ב. באיזו נקודה על המשולש יהיה רוכב **ב**, כאשר יגיע רוכב **א** אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול המשולש?

כאשר הגיע רוכב **א** אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול, הוא הסתובב והחל לרכוב לכיוון הנגדי — מן הנקודה A לכיוון הנקודה C — בלי לשנות את מהירותו.

רוכב **ב** המשיך לרכוב בכיוון הנסיעה המקורי, בלי לשנות את מהירותו. הרוכבים נפגשו בנקודה M .

ג. מצא על איזו צלע של המשולש נמצאת הנקודה M , ומצא באיזה יחס הנקודה M מחלקת את הצלע שמצאת.

למוחרת שוב יצאו הרוכבים מן הנקודה A , רכבו לכיוון הנקודה B והמשיכו לרכוב במסלול המשולש, כל אחד מהם רכב באותה המהירות שרכב ביום שלפני כן. רוכב **א** חלף על פני רוכב **ב** בפעם הראשונה 6 דקות אחרי שיצאו לדרך.

ד. מצא את היקף המשולש. נמק את תשובתך.

המשך בעמוד 3

2. נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n את הכלל: $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$

א. הוכח כי מתקיים $a_{n+2} = a_n + c$ (c הוא מספר קבוע), ומצא את c .

ב. כתוב דוגמה לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).

נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

ג. חשב את a_1 .

בנו סדרה חדשה בת $2n+1$ איברים:

$$a_1 - 1 \ , \ a_2 - 2 \ , \ a_3 - 3 \ , \ \dots \ , \ a_{2n+1} - (2n+1)$$

האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43 .

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.

3. בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו־ 8 כדורים צהובים.

על 28 מן הכדורים רשומה הספרה **1** , ועל השאר רשומה הספרה **0** .

$\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה **1** הם צהובים.

מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה **1** גדול פי 4 ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה **0** .

דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.

א. מהי ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה **1** ?

ב. אם ידוע שדני הוציא באקראי כדור כחול <u>או</u> כדור שרשומה עליו הספרה **1** , מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה **0** ?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק: הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.

בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה **1** הוא צובר נקודה.

הוא יפסיק לשחק כאשר הוא יצבור 5 נקודות.

ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים <u>בדיוק</u>?

המשך בעמוד 4 ◀

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

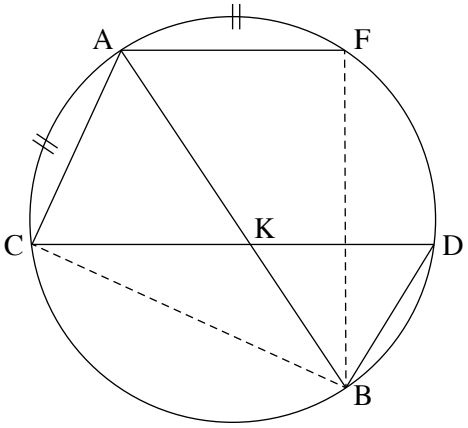
ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. AB הוא קוטר במעגל. CD ו־ AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה.

AB ו־ CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור).

נתון כי $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{AF}$ (הקשתות המסומנות בציור).



א. **(1)** הוכח כי $\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB$.

(2) הוכח כי $BK = BD$.

ב. הוכח כי המרובע AFKC הוא מעוין.

ג. נתון גם כי $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.

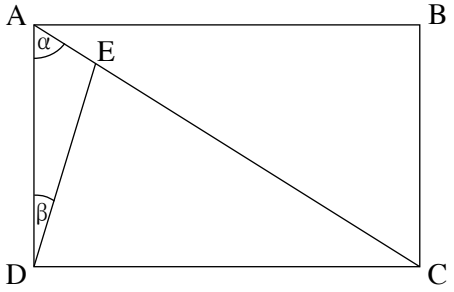
(1) הוכח כי $\triangle BDC \sim \triangle CAB$.

(2) הוכח כי CD הוא קוטר במעגל.

5. נתון מלבן ABCD . הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).

נתון כי $\sphericalangle DAC = \alpha$,

$\sphericalangle ADE = \beta$.



R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD .

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE .

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו־ β .

ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\alpha = 60^o$, $\beta = 15^o$.

(1) הראה כי $\triangle DEC$ הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע את BE^2 באמצעות R_1 .

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \cos 2x + \sin^2 x$ המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$. a הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית או אף לא אחת מהן? נמק.

ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (הבע באמצעות a אם צריך), אם נתון כי הפונקציה אינה קבועה? קבע את סוגן בהתאם לערך של a (התייחס לשתי האפשרויות עבור a).

ג. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה $f(x)$ היא קבועה. נמק.

נתון: $a > 1$.

ד. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־x שווה ל־12. מצא את a.

7. נתון מעגל ובו קוטר AB. רדיוס המעגל הוא 10. הנקודה P נמצאת על הקוטר AB בין מרכז המעגל ובין הנקודה B.
דרך הנקודה P מעבירים אנך ל־AB החותך את המעגל בנקודות C ו־D.
מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD.

המשך בעמוד 6

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+bx-c}{x^2-4}$. c ו־ b הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה־ x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c .

ד. **(1)** מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (הבע באמצעות c אם צריך).

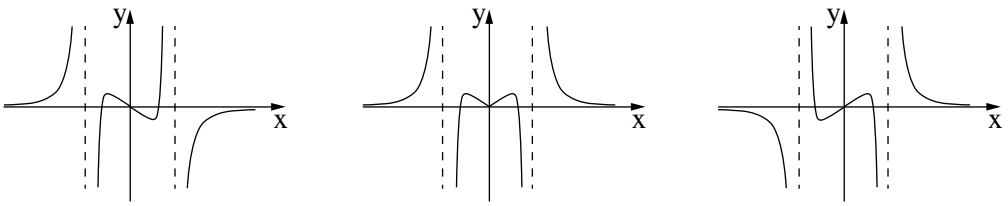
(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$.

לפניך גרפים I-III .

(1) איזה מן הגרפים, I-III , הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) הבע באמצעות c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .



III **II** **I**

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

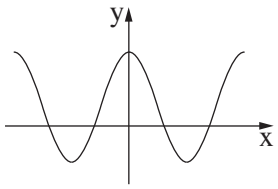
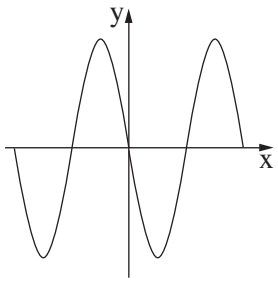
פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, מועד ב, קיץ תשע"ט

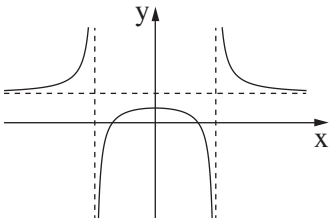
יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	מהירות רוכב א — 6 מטרים לשנייה מהירות רוכב ב — 4 מטרים לשנייה
ב.	בנקודה B
ג.	M נמצאת על הצלע BC $BM : MC = 4 : 1$
ד.	720 מטרים
.2	
א.	הוכחה $c = 6$
ב.	דוגמה
ג.	$a_1 = 4$
ד.	1,763
.3	
א.	$\frac{9}{40}$
ב.	$\frac{3}{31}$
ג.	0.252105
.4	
א. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה
ב.	הוכחה
ג. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א.	$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$
ב.	להראות
ג. (1)	להראות
(2)	$BE^2 = (4-\sqrt{3})\cdot R_1^2$
.6	
א.	זוגית
ב.	**עבור** $a > \frac{1}{2}$ **:** מקסימום $(-\pi, a), (0, a), (\pi, a)$ מינימום $(-\frac{\pi}{2}, 1-a), (\frac{\pi}{2}, 1-a)$ **עבור** $a < \frac{1}{2}$ **:** מינימום $(-\pi, a), (0, a), (\pi, a)$ מקסימום $(-\frac{\pi}{2}, 1-a), (\frac{\pi}{2}, 1-a)$
ג.	$a = \frac{1}{2}$
ד. (1)	
(2)	
ה.	$a = 2$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	השטח המקסימלי הוא $75\sqrt{3}$
.8	
א.	$x \neq \pm 2$
ב.	$b = 0$
ג.	$0 < c < 4$
ד. (1)	מקסימום $\left(0 , \frac{c}{4}\right)$
(2)	אסימפטוטה $y = 1$ 
ה. (1)	III
(2)	$\frac{c^2}{16}$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ט, 2019
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	— אלגברה והסתברות	— 2×20	— 40 נקודות
פרק שני	— גאומטריה וטריגונומטריה במישור	— 1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	— חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	— 2×20	— 40 נקודות
		סה"כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. במאפייה יש שתי מכונות לייצור עוגות: מכונה I ומכונה II .

כל אחת מן המכונות מייצרת עוגות בקצב קבוע משלה.

ביום ראשון זמן העבודה של שתי המכונות היה שווה.

ביום ראשון מכונה I ייצרה 80 עוגות יותר ממספר העוגות שייצרה מכונה II .

ביום שני ייצרה מכונה II את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה I ביום ראשון, ומכונה I ייצרה את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה II ביום ראשון.

ביום שני היה זמן העבודה של מכונה II ארוך פי $\frac{25}{9}$ מזמן העבודה של מכונה I באותו יום.

א. חשב כמה עוגות סך הכול ייצרו שתי המכונות ביום ראשון.

נסמן: T_1 — הזמן הדרוש למכונה I לייצר עוגה אחת,

T_2 — הזמן הדרוש למכונה II לייצר עוגה אחת.

ב. חשב את היחס $\frac{T_1}{T_2}$. נמק.

ג. **(1)** בפרק זמן מסוים מכונה I ייצרה בדיוק 47 עוגות.

כמה עוגות שלמות ייצרה מכונה II בפרק הזמן הזה? הסבר.

(2) ידוע ששתי המכונות עבדו אותו פרק זמן, וכל אחת מהן ייצרה מספר שלם של עוגות.

האם ייתכן שבפרק הזמן הזה שתי המכונות יחד ייצרו 26 עוגות? נמק.

/המשך בעמוד 3/

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית שהמנה שלה היא q. $|q| \neq 1$.

נתון: $a_3 \cdot a_7 = 1$.

א. חשב את a_5 (מצא את שתי האפשרויות).

נתון: $a_5 > 0$.

ב. **(1)** הבע את a_1 באמצעות q.

(2) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_1}$? אם כן — מצא אותו. אם לא — נמק.

(3) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_{13}}$? אם כן — מצא אותו. אם לא — נמק.

ג. **(1)** הבע באמצעות q את 7 האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

(2) נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = 1$ (k הוא מספר טבעי).

מצא את הערך של k, והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של k.

3. גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים. בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה.

המנצחת במשחק כולו תהיה זו שתזכה ביותר סיבובים מחברתה.

אם לשתיהן מספר שווה של זכיות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו.

נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא $\frac{1}{3}$.

א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים בַּמשחק.

(1) מהי ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו?

(2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?

ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק. הפעם הן החליטו מראש שאם התוצאה במשחק של 4 הסיבובים תהיה תיקו — הן ישחקו עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר סיבובים, תנצח במשחק כולו.

מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?

ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים: ראשון או שני.

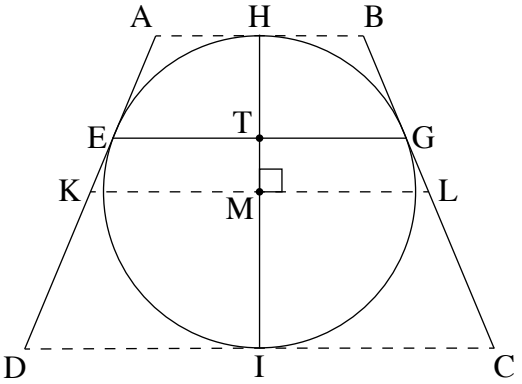
מהו הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r .

דרך הנקודות E ו־G העבירו משיקים למעגל.

דרך מרכז המעגל, M , העבירו ישר המקביל למיתר EG

וחותך את המשיקים בנקודות K ו־L , כמתואר בציור.

דרך מרכז המעגל, M , העבירו אנך ל־KL

אשר חותך את המיתר EG בנקודה T

ואת המעגל בנקודות H ו־I , כמתואר בציור.

נסמן: $TG = a$.

א. **(1)** הוכח: $TG \cdot ML = MG^2$.

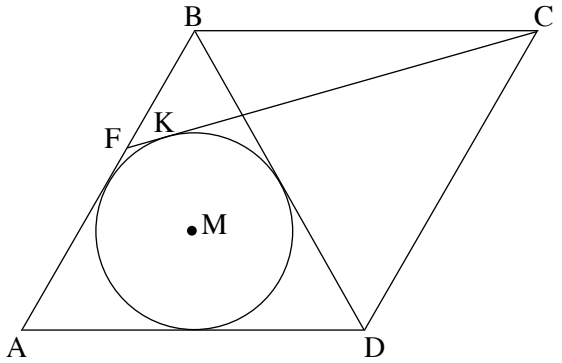
(2) הבע את אורך הקטע KL באמצעות a ו־r .

דרך הנקודות H ו־I העבירו משיקים למעגל כך שנוצר טרפז שווה שוקיים ABCD שחוסם את המעגל, כמתואר בציור.

ב. **(1)** הוכח: $BC = KL$.

(2) הבע את היקף הטרפז ABCD באמצעות a ו־r .

ג. האם היחס בין היקף הטרפז ABCD והיקף המעגל יכול להיות קטן מ־ $\frac{4}{\pi}$? נמק.



5. ABCD הוא מעוין שאורך צלעו הוא a .

נתון: $\sphericalangle BAD = 60^o$.

במשולש ABD חסום מעגל שמרכזו M .

מן הקודקוד C העבירו משיק למעגל

שהמשכו חותך את הצלע AB בנקודה F

והוא משיק למעגל בנקודה K (ראה ציור).

א. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.

ב. **(1)** הסבר מדוע הנקודה M נמצאת על אלכסון המעוין AC .

(2) חשב את גודל הזווית ACF .

ג. הבע באמצעות a את שטח המשולש ACF .

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 8-6 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$. a הוא פרמטר המקיים $-4<a<2$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבר מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה־ y .

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה־ x .

(4) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(5) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. **(1)** הבע באמצעות a את שיעורי ה־ x שבעבורם $f'(x)=0$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את הערך של a שבעבורו $f'(x)\neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

הצב $a=-1$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. **(1)** מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את $\int_3^4 \frac{1}{f(x)}dx$. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 \sin x$ המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. **(1)** קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x בתחום הנתון.

(3) הסבר מדוע הפונקציה $f(x)$ היא אי־שלילית בתחום הנתון.

(4) קבע אם פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, היא זוגית או אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית. נמק.

ב. **(1)** הראה ששיעורי ה־ x שעבורם $f'(x) = 0$ מקיימים $\tan x = -\frac{1}{3}x$.

(2) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

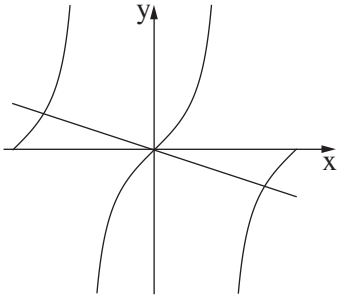
$h(x) = -\frac{1}{3}x$ ו־ $g(x) = \tan x$

בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

היעזר בציור,

וקבע כמה נקודות בתחום $-\pi \le x \le \pi$

מקיימות $f'(x) = 0$.



נתון: שיעור ה־ x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 2.46 בקירוב.

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור התחום $-\pi \le x \le \pi$.

ג. **(1)** מה הם שיעורי ה־ x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום.

ד. **(1)** סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, בתחום.

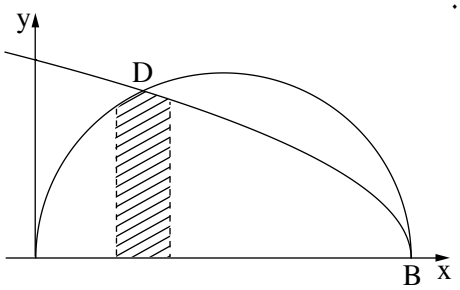
(2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק.

/המשך בעמוד 7/

8. בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\sqrt{-x^2+7x}$ ו־ $g(x)=\sqrt{14-2x}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בראשית הצירים ובנקודה B ,

ואת גרף הפונקציה $g(x)$ הוא חותך בנקודות B ו־ D , כמתואר בציור.



א. **(1)** מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי ה־ x של הנקודות B ו־ D .

a הוא פרמטר המקיים $1 \le a \le 2$.

השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$,

על ידי האנכים $x=a$ ו־ $x=a+1$ ועל ידי ציר ה־ x , מסתובב סביב ציר ה־ x .

ב. **(1)** חשב את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המקסימלי.

(2) מצא את a שבעבורו נפח הסיבוב המתקבל הוא המינימלי.

אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, קיץ תשע"ט

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

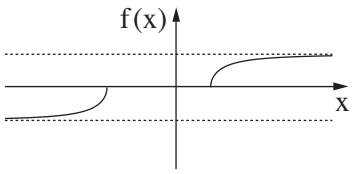
יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

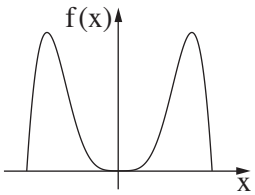
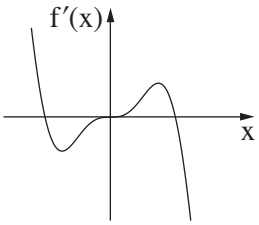
מספר השאלה	התשובה הנכונה
1.	
א.	320
ב.	$\frac{3}{5}$
ג. (1)	28
(2)	לא
2.	
א.	± 1
ב. (1)	$\frac{1}{q^4}$
(2)	כן, 9
(3)	לא
ג. (1)	$a_1 = \frac{1}{q^4}$
	$a_2 = \frac{1}{q^3}$
	$a_3 = \frac{1}{q^2}$
	$a_4 = \frac{1}{q}$
	$a_5 = 1$
	$a_6 = q$
	$a_7 = q^2$
(2)	9 , להסביר יחידות

מספר השאלה	התשובה הנכונה
3.	
א. (1)	$\frac{1}{9}$
(2)	$\frac{8}{27}$
ב.	$\frac{137}{729}$
ג.	$\frac{137}{211}$
4.	
א. (1)	הוכחה
(2)	$\frac{2r^2}{a}$
ב. (1)	הוכחה
(2)	$\frac{8r^2}{a}$
ג.	לא

משרד החינוך

הצעה לפתרון בחינות בגרות מתמטיקה, קיץ תשע"ט

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א.	$\frac{\sqrt{3}}{6}a$
ב. (1)	הסבר
(2)	$\sim 14.48^{o}$
ג.	$\sim 0.2676a^2$
.6	
א. (1)	$x \le -2 \ , \ 1 \le x$
(2)	להסביר
(3)	$y = \pm\frac{1}{2}$
(4)	$(-2,0) \ , \ (1,0)$
(5)	תחום חיוביות: $1 < x$ תחום שליליות: $x < -2$
ב. (1)	$\frac{8-a}{2a+2}$
(2)	-1
ג. (1)	תחומי העלייה: $x < -2 \ , \ 1 < x$
(2)	אין תחומי ירידה 
ד.	$2\sqrt{18} - 2\sqrt{10}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.7	
א. (1)	זוגית
(2)	$(\pi,0) \ , \ (0,0) \ , \ (-\pi,0)$
(3)	להסביר
(4)	אי־זוגית
ב. (1)	להראות
(2)	שלוש
ג. (1)	$-\pi$, מינימום ~ -2.46 , מקסימום 0 , מינימום ~ 2.46 , מקסימום π , מינימום
(2)	
ד. (1)	
(2)	שתיים

מספר השאלה	התשובה הנכונה
8.	
א. (1)	תחום ההגדרה של $f(x)$: $0 \le x \le 7$ תחום ההגדרה של $g(x)$: $x \le 7$
(2)	$x_D = 2$, $x_B = 7$
ב. (1)	~ 1.63
(2)	1

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: חורף תשע"ט, 2019
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	— אלגברה והסתברות	— 2×20	— 40 נקודות
פרק שני	— גאומטריה וטריגונומטריה במישור	— 1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	— חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	— 2×20	— 40 נקודות
		סה"כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. קבוצת פועלים, חוטבי עצים מנוסים, תכננה לכרות 216 מ"ק עץ במספר ימים מסוים (ההספק של הפועלים הוא קבוע).

בשלושת הימים הראשונים עבדו הפועלים על פי ההספק המתוכנן. החל מן היום הרביעי הם הגבירו את קצב עבודתם ומדי יום כרתו 8 מ"ק עץ יותר מן המתוכנן. הם עבדו בפועל יום אחד פחות ממספר הימים המתוכנן, וכרתו 232 מ"ק עץ סך הכול.

א. **(1)** על פי התכנון, כמה מ"ק עץ היו אמורים הפועלים לכרות ביום?

(2) כמה ימים עבדו הפועלים בפועל?

ב. במהלך איזה יום מתחילת העבודה סיימו הפועלים לכרות $\frac{2}{3}$ מן הכמות המתוכננת?

לאחר מכן הוצמד פועל מִתלַמד לכל פועל מנוסה בקבוצה, וכך נוצרה קבוצה חדשה ובה $2m$ פועלים סך הכול (m מנוסים ו־m מִתלַמדים).

ההספק היומי של הפועלים המנוסים הוא ההספק היומי המתוכנן. כל הפועלים המנוסים עובדים באותו הספק יומי.

ההספק היומי של פועל מִתלַמד קטן ב־ 1 מ"ק מן ההספק היומי של פועל מנוסה. הקבוצה החדשה עבדה 8 ימים.

ג. **(1)** בטא את ההספק היומי של פועל מנוסה יחיד ושל פועל מִתלַמד יחיד באמצעות m .

(2) כמה פועלים יש בקבוצה החדשה אם ידוע שהם כרתו 336 מ"ק עץ סך הכול?

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_{2n+3}$ ובה $2n+3$ איברים (n הוא מספר טבעי).

סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ־ 0 .

א. **(1)** הראה כי סכום הסדרה שווה ל־ $(2n+3) \cdot a_{n+2}$.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים גדול ב־ 40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(1) מצא את האיבר האמצעי.

(2) מצא את סכום הסדרה.

נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$.

ג. קבע אם הסדרה עולה או יורדת.

מכל איברי הסדרה הנתונה בונים סדרה חדשה על ידי חיבור של כל k איברים סמוכים (k הוא מספר טבעי) באופן הזה:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \ , \ (a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1}) \ , \ (a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2}) \ , \dots$$

ד. הבע באמצעות k את מספר האיברים בסדרה החדשה.

3. בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י"ב לבחינת המתכונת באזרחות ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות.

נתון: גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הבגרות היה שווה למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הבגרות.

א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת, ההסתברות שהוא עבר את בחינת הבגרות היא 0.9 .

שיעורם של הנכשלים בבחינת הבגרות מכלל התלמידים שניגשו לבחינות בשנה זו היה 20% .

(1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הבגרות?

(2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת. מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הבגרות?

(3) בוחרים באקראי (עם החזרה) שני תלמידים שנכשלו בבחינת הבגרות. מהי ההסתברות ששניהם נכשלו גם בבחינת המתכונת?

ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע "עובר את בחינת המתכונת" לבין המאורע "עובר את בחינת הבגרות", וכי ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הבגרות בשנה זו היא a $(0 < a < 1)$.

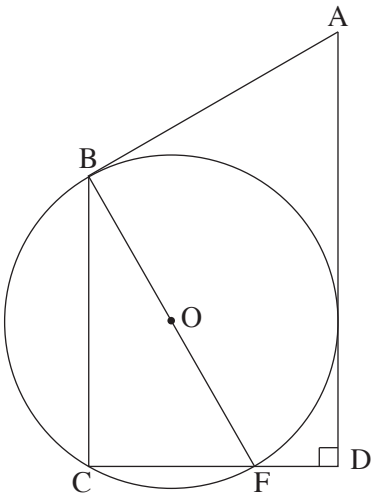
הבע באמצעות a את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הבגרות בשנה זו.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. BF הוא קוטר במעגל.
מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל — האחד משיק למעגל בנקודה B
והאחר חותך את המשך הצלע CF בנקודה D, כמתואר בציור שלפניך.
נתון: $AD \perp CD$.

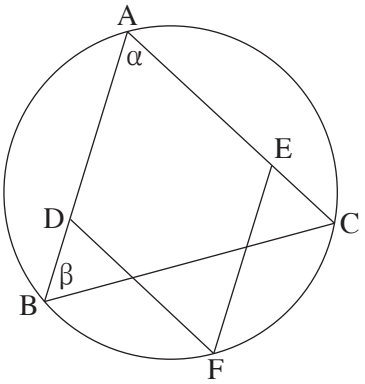
א. הוכח: $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAD$.

נתון: K היא נקודה על הצלע BC, כך ש־ FK חוצה את $\sphericalangle BFC$.

ב. הוכח: $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$.

ג. הוכח: $KB \cdot AB = 2R^2$.

ד. הסבר מדוע שטח ΔBFK גדול משטח ΔKFC.



5. ABC הוא משולש החסום במעגל שרדיוסו R.
הנקודות D ו־ E נמצאות על הצלעות AB
ו־ AC בהתאמה, והנקודה F נמצאת על הקשת BC
כך שהמרובע $ADFE$ הוא מעוין (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

א. **(1)** הבע באמצעות α ו־ β את $\sphericalangle ABF$.

(2) הבע באמצעות R, α ו־ β את אורך האלכסון AF.

ב. הבע באמצעות R, α ו־ β את אורך צלע המעוין.

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

ג. הראה כי שטח המעוין הוא $2R^2 \tan\frac{\alpha}{2}$.

נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין $ADFE$ הוא $\frac{3}{5}R$.

ד. חשב את β.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתון: הפונקציה $g''(x) = -\frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4}$ היא פונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרות באותו תחום.

נתון כי משוואת המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודת הפיתול שלה היא $y = \frac{3}{2}x - 3$.

א. **(1)** מצא את הפונקציה $g(x)$.

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(3) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x) = |g(x)|$.

ב. באותה מערכת צירים שבה סרטטת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, הוסף בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. נתון כי $\int_a^2 g(x)\,dx = t$, $0 < a < 2$, t הוא פרמטר.

הבע באמצעות t את $\int_a^2 (h(x) - g(x))\,dx$.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sin x + \cos 2x - 1$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3}{2}\pi$.

א. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז שמאלה ב־ $\frac{\pi}{2}$ כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

ב. **(1)** בטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) הוכח כי $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

לפניך 3 ביטויים, I-III :

I: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+\pi)\,dx$ II: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ III: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$

ג. ציין איזה מן הביטויים I-III שווה ל־ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

נמק את תשובתך. אין צורך בחישוב.

8. במשולש ABC נתון: $AB = 30$, $AC = 20$.

$\sphericalangle CAB = \alpha$. α הוא קבוע.

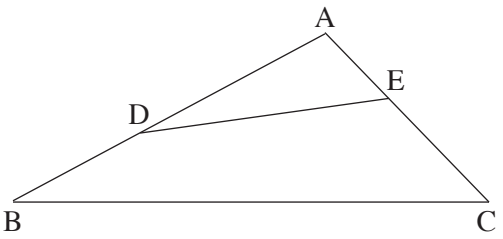
הנקודה D נמצאת על הצלע AB

והנקודה E נמצאת על הצלע AC (ראה ציור).

נתון: שטח המשולש ADE שנוצר באופן הזה הוא

רבע משטח המשולש ABC .

סמן את אורך הקטע AD ב־ x .



א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE .

ב. **(1)** הבע באמצעות α את האורך המינימלי של הקטע DE .

(2) הסק מתת־סעיף ב(1) את הערך של x שבעבורו היחס $\frac{DE}{BC}$ הוא מינימלי. הסבר.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, חורף תשע"ט

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

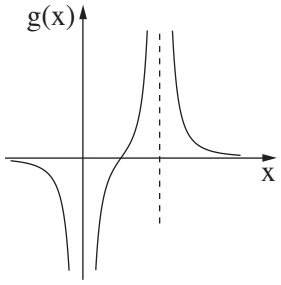
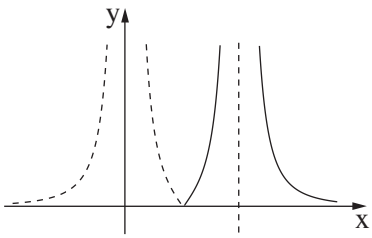
יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

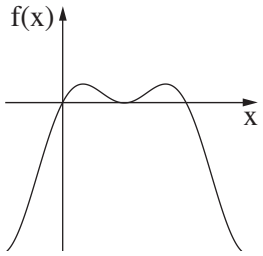
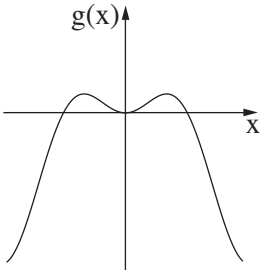
מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.(1)	24 מ"ק
(2)	8 ימים
ב.	במהלך היום השישי
ג. (1)	מנוסה: $\frac{24}{m}$ מתלמד: $\frac{24}{m}-1$
(2)	12
.2	
א.(1)	להראות
(2)	43 איברים
ב. (1)	40
(2)	1,720
ג.	הסדרה עולה
ד.	$44-k$
.3	
א.(1)	180
(2)	0.4
(3)	0.36
ב.	$a-a^2$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג.	הוכחה
ד.	הסבר
.5	
א.(1)	$\frac{\alpha}{2}+\beta$
(2)	$2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$
ב.	$\frac{R\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$
ג.	להראות
ד.	$\beta=53.13^{o}$

משרד החינוך

הצעה לפתרון בחינות בגרות מתמטיקה, חורף תשע"ט

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א.(1)	$g(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{(x-4)^2}$
(2)	$x \neq 4 \ , \ x \neq 0$
(3)	עלייה: $0 < x < 4$ ירידה: $x < 0 \ , x > 4$
(4)	
ב.	
ג.	$-2t$
.7	
א.(1)	$(0,0) \ , \ \left(\frac{\pi}{2},0\right) \ , \ (\pi,0)$
(2)	מקסימום: $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ מינימום: $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ $\left(-\frac{\pi}{2},-4\right)$ $\left(\frac{3\pi}{2},-4\right)$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
(3)	
ב.(1)	$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
(2)	
(3)	הוכחה
ג.	II
.8	
א.	$AE = \frac{150}{x}$
ב.(1)	$DE = \sqrt{300 - 300\cos\alpha}$
(2)	$x = \sqrt{150}$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תשע"ח, 2018, **מועד ב**
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	— אלגברה והסתברות	— 2×20	— 40 נקודות
פרק שני	— גאומטריה וטריגונומטריה במישור	— 1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	— חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	— 2×20	— 40 נקודות
		סה"כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.

רננה יצאה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה.

3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה. הוא רץ במהירות קבועה של 2.5 מטרים לשנייה.

כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך, ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו — רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית. רננה המשיכה ללכת באותה המהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות של 1.5 מטרים לשנייה.

אביה של רננה הגיע אל הבית בדיוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.

ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?

2. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1 = -\frac{1}{c}$. נתון: $c > 0$.

א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי־זוגיים מהווים סדרה הנדסית,
וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. (1) רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n . הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב־ n .

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

(1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האין־סופית b_n היא סדרה יורדת.
הבע באמצעות c את סכומה.

המשך בעמוד 3 ◀

3. במבחן רב־ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.

לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.

תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה, ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש־ k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.

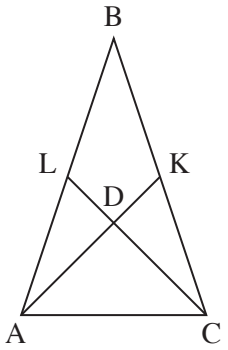
מצא את k. נמק.

המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = BC)$.

AK ו־CL הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה D.

נתון: $AK \perp CL$.

א. הוכח: $BD = AC$.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$.

ג. M הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע ALKC.

(1) הוכח: $\sphericalangle AML = 90^o$.

(2) מצא את היחס $\frac{AM}{AD}$.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

5. ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$.

BD הוא חוצה זווית במשולש ABC.

המשך הקטע BD חותך את המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E.

גודל הזווית ABC הוא 2β.

א. הבע באמצעות β את $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$, היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE.

אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

נתון: BE שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$.

נסמן ב־a את אורך השוק AB.

ג. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החסום על ידי המשולש ABC.

בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

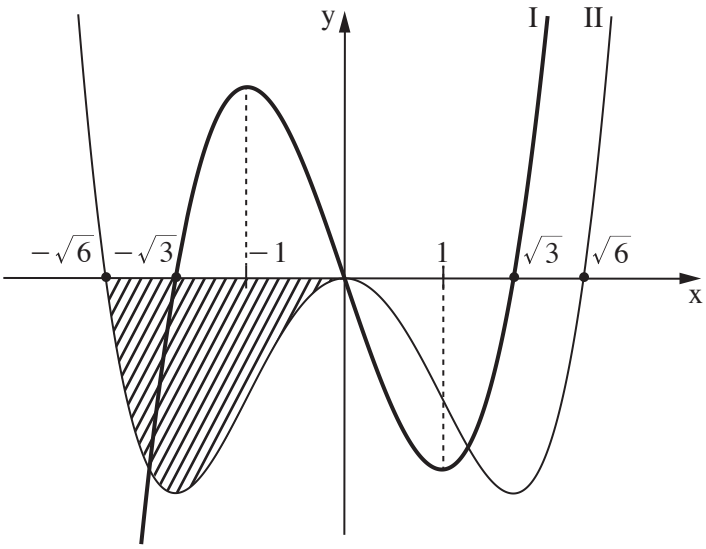
המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. לפניך הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו־$f''(x)$ (פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$) בתחום $-2.5 \le x \le 2.5$. שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.



א. התאם בין הגרפים I ו־II ובין הפונקציות $f'(x)$ ו־$f''(x)$. נמק.

ב. **(1)** כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

ג. עבור איזה ערך של x בתחום $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, הוא מינימלי?

נתון: $f(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא t.

ה. הבע באמצעות t את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה־x (השטח המקווקו בציור).

ו. נתון: קיימים a, b ו־c ממשיים כך ש־ $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$.

מצא את c ואת היחס $\frac{a}{b}$.

המשך בעמוד 6

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום $x \geq \frac{2}{7}$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית. מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיף ו עבור התחום $x > 0$.

ו. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

לפניך 3 טענות (i-iii). אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

i) ככל שמתקרבים ל־ $x=0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקָטֵן.

ii) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

iii) ככל שמתקרבים ל־ $x=0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגָדֵל.

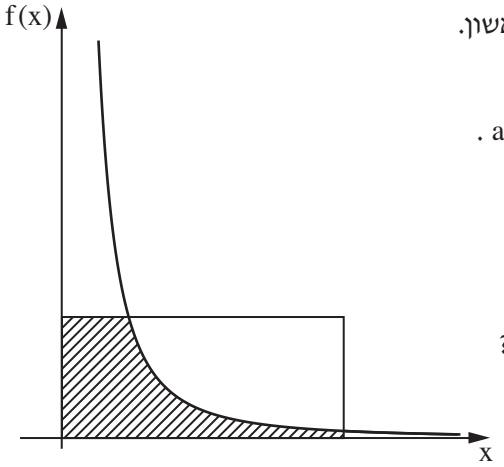
8. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ בתחום $x>0$,
ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון.

נתון: שטח המלבן הוא 4 .

נסמן ב־ a את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה־ x . נתון: $a \geq \frac{1}{4}$.

א. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הצירים,
על ידי צלעות המלבן ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$
(השטח המקווקו בציור).

ב. עבור איזה ערך של a השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?



בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, קיץ תשע"ח, מועד ב

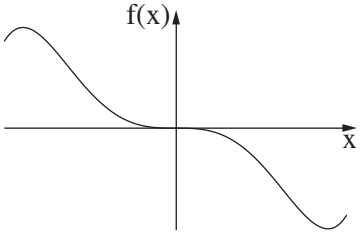
יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	1 מטר לשנייה
ב.	10 דקות ו־ 20 שניות
.2	
א.	הוכחה
ב. (1)	$a_1 = -\frac{1}{c}$
	$a_2 = 1$
	$a_3 = -1$
	$a_4 = c$
	$a_5 = -c$
	$a_6 = c^2$
	$a_7 = -c^2$
(2)	$-\frac{1}{c}$
(3)	הוכחה
ג. (1)	הוכחה
(2)	$c > 1$
(3)	$\frac{2c^2}{c-1}$ או $\frac{2c}{1-\frac{1}{c}}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.3	
א. (1)	$\frac{27}{64}$ או ~ 0.42
(2)	$\frac{37}{64}$ או ~ 0.58
ב.	$\frac{4}{9}$
ג.	2
.4	
א.	הוכחה
ב.	$\frac{1}{3}$
ג. (1)	הוכחה
(2)	$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ או ~ 0.79
.5	
א.	$\frac{\sin(2\beta)\cdot\sin(3\beta)\cdot\sin(4\beta)}{\sin^3\beta}$
ב.	~ 20.99
ג.	$\sim 0.17a$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.6	
א.	$f'(x)$ — II , $f''(x)$ — I
ב. (1)	שתיים
(2)	שלוש
ג.	1
ד.	
ה.	t
ו.	$\frac{a}{b}=-\frac{1}{10}$, $c=0$
.7	
א.	$x \neq 0$
ב.	$\left(\frac{1}{3},0\right)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $(1,0)$
ג.	$\left(\frac{2}{7},-1\right)$ מינימום $\left(\frac{2}{5},1\right)$ מקסימום $\left(\frac{2}{3},-1\right)$ מינימום $(2,1)$ מקסימום
ד.	$y=0$
ה.	
ו.	i

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.8	
א.	$\frac{4}{\sqrt{a}}-\frac{1}{a}$
ב.	$\frac{1}{4}$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ח, 2018
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	— אלגברה והסתברות	— 2×20	— 40 נקודות
פרק שני	— גאומטריה וטריגונומטריה במישור	— 1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	— חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	— 2×20	— 40 נקודות
		סה"כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה.

אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א.

אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתיים אחרי שעבר על פני משה, ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V .

בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה.

נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.

ב. **(1)** הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.

(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.

/המשך בעמוד 3/

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת שסכומה שלילי.

a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, ו־ q היא מנת הסדרה.

א. לפניך ארבע טענות (I-IV) . רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציין את מספרה ונמק.

I) $q < 0$

II) $a_1 < 0$ וגם $q < 0$

III) $a_1 < 0$

IV) $a_1 > 0$ או $q < 0$

נסמן ב־ T את סכום האיברים במקומות האי־זוגיים בסדרה a_n ,

ונסמן ב־ R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n .

p הוא פרמטר.

נתון: $T + p \cdot R = 0$.

ב. הבע את p באמצעות q .

b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p .

ג. האם b_n היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: p שלילי. הראה שלכל n טבעי $a_{n+1} > a_n$

(כלומר הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

3. בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.

37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.

מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.

מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II :

I) התלמיד נעזר בחבריו.

II) התלמיד לא עבר את המבחן.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

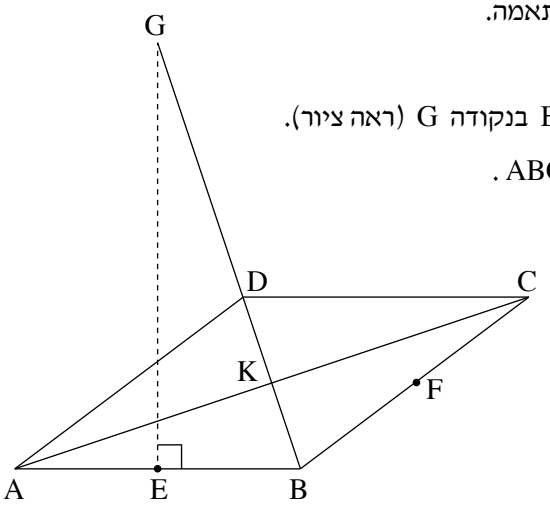
ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. ABCD הוא מעוין. E ו־F הן אמצעי הצלעות AB ו־BC בהתאמה.

הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין.

מן הנקודה E העלו אנך ל־AB, החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).



א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M,

שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.

ב. הוכח שהמשולשים MFC, BKC, ו־BFG דומים זה לזה.

נסמן ב־R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC,

וב־r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

ג. **(1)** הוכח כי $\frac{MC}{GB}=\frac{MF}{CF}$ וכי $\frac{MF}{CF}=\frac{BK}{CK}$.

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל־$\frac{r}{R}$.

5. ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^o$).

M היא נקודה על היתר כך ש־ $AM : MC = \sqrt{3} : 4$.

נתון: $\sphericalangle ABM = 30^o$, $BM = 8$.

א. **(1)** סמן: $MC = 4x$ וחשב את זוויות המשולש ABC.

(2) חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו־CMB.

ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו־CBM ב־O_1 ו־O_2 בהתאמה.

(1) הסבר מדוע המרובע BO_1MO_2 הוא דלתון.

(2) חשב את אורך הקטע O_1O_2.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$. a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

א. הוכח: $a>1$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות a .

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה־ x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a=3$.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x , ועל ידי הישרים $x=\frac{2}{3}$ ו־ $x=2$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x .

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו־ $x=b$ ($b>\frac{1}{3}$).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו־ $x=b$ שווה ל־ $2S$ בעבור כל b .

הבע את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x>\frac{1}{3}$ (כתוב את שתי האפשרויות). אין צורך להוכיח את תשובתך.

/המשך בעמוד 6/

.7 $f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x , כך ש־ $f(x) \neq 0$ לכל x .

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע;

ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, המוגדרת לכל x .

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x) = 0$? נמק.

ג. **(1)** האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x) = g(x + 2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ באותה מערכת צירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $g(x)$.

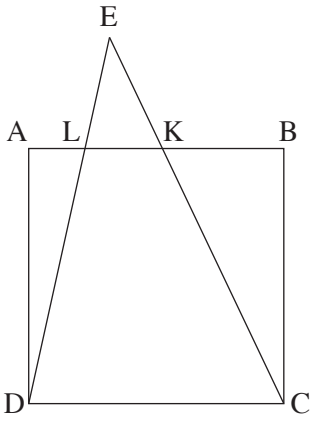
.8 $ABCD$ הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

K ו־ L הן נקודות על הצלע AB .

נתון כי הישרים CK ו־ DL חותכים זה את זה בנקודה E ,

הנמצאת מחוץ לריבוע $ABCD$ (ראה ציור).

נסמן: $LK = x$.



א. הבע באמצעות x את גובה המשולש KLE .

ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים BCK , ADL ו־ KLE

הוא מינימלי? נמק.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

משרד החינוך

פתרונות לבחינות בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון, מס' 035581, קיץ תשע"ח

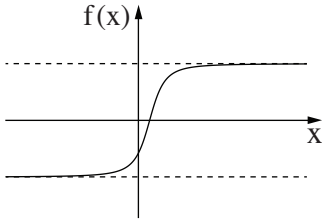
יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

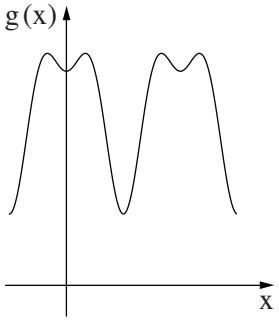
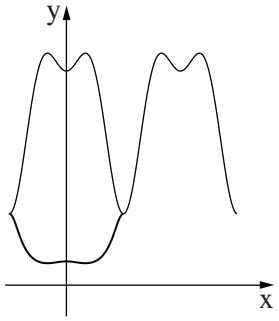
יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.1	
א.	10:00
ב. (1)	6V
(2)	$\frac{3}{4}V < V_{\text{יסמין}} < 3V$
.2	
א.	III
ב.	$p = -\frac{1}{q}$
ג.	לא
ד.	להראות
.3	
א.	$\frac{2}{9}$
ב.	כן
ג.	~ 0.18
ד.	0.44
.4	
א.	הוכחה
ב.	הוכחה
ג. (1)	הוכחה
(2)	הוכחה

מספר השאלה	התשובה הנכונה
.5	
א. (1)	$\sphericalangle BAC \approx 53.13^{o}$, $\sphericalangle ACB \approx 36.87^{o}$
(2)	רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABM : 5 רדיוס המעגל החוסם את המשולש CMB : $\frac{20}{3}$
ב. (1)	הסבר
(2)	$8\frac{1}{3}$

מספר השאלה	התשובה הנכונה
6.	
א.	הוכחה
ב. (1)	$(\frac{1}{a}, 0)$, $(0, -1)$
(2)	$y = \pm\sqrt{a}$
(3)	הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x .
(4)	
ג.	2
ד.	בתחום $x > \frac{1}{3}$ $g(x) = -f(x)$ <u>או</u> $g(x) = 3f(x)$
7.	
א.	הוכחה
ב.	לא
ג. (1)	כן
(2)	להראות
(3)	$(0, 3)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{3}, 3\frac{1}{4}\right)$ מקסימום, $(\pi, 1)$ מינימום

מספר השאלה	התשובה הנכונה
7. המשך	
(4)	
ד. (1)	כל x
(2)	
8.	
א.	$\frac{6x}{6-x}$
ב.	$6 - 3\sqrt{2}$ <u>או</u> ~ 1.76

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: חורף תשע"ח, 2018
מספר השאלון: 035581, 035806, 316
נספח: דפי נוסחאות ל־ 5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	— 40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	2×20	— 40 נקודות
				סה"כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א' ובריכה ב'.

הנפח של בריכה א' הוא V_1 והנפח של בריכה ב' הוא V_2 .

את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הֶספק.

ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.

התחילו למלא את בריכה א' באמצעות ארבעת הצינורות. כאשר התמלאה בריכה א' לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב' והתחילו למלא אותה באמצעותו. כאשר התמלאה בריכה א' עד מחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב'.

מילוי שתי הבריכות הסתיים באותו הזמן.

כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהתמלאו שתי הבריכות.

חשב את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.

2. a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d , שונה מ־ 0 .

נתון: $a_7 = -a_{17}$.

א. מצא את a_{12} .

ב. **(1)** האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל־ $-a_1$? נמק.

(2) מצא מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל־ 0 .

ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן — מצא n כזה, אם לא — נמק.

ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

/המשך בעמוד 3/

3. למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2 , ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4 .

לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3 .

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1 ? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

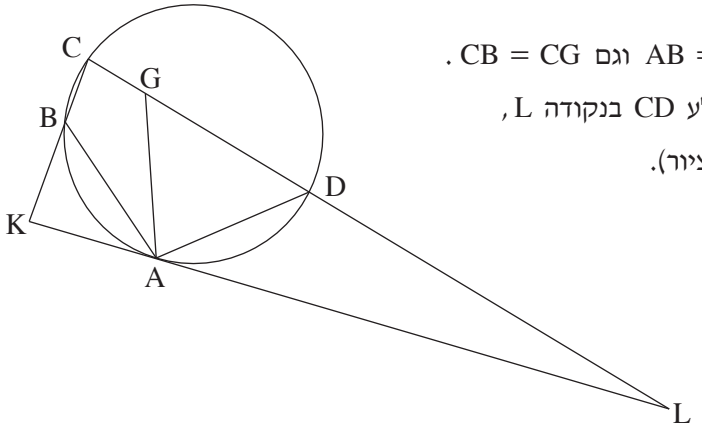
שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. המרובע ABCD חסום במעגל.

הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך ש־ $AB = AG$ וגם $CB = CG$.

המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה L ,

וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K (ראה ציור).



א. הוכח כי $AD = AG$.

ב. **(1)** הוכח כי $\triangle ABK \sim \triangle CDA$.

(2) הוכח כי $AD^2 = BK \cdot CD$

ג. הראה כי $\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}$.

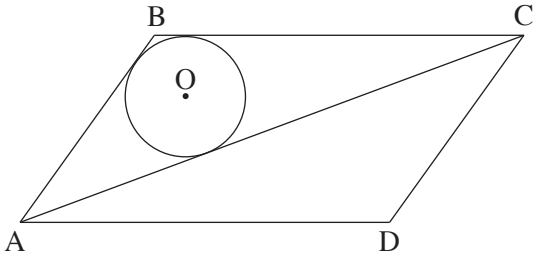
5. נתונה מקבילית ABCD . AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.

במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.

נתון: הנקודה O נמצאת במרחקים 6 ו־ 3

מן הישרים AD ו־ AC בהתאמה;

$OA = 10$.



א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC .

ג. חשב את שטח המקבילית.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

ענה על סעיף א עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה־ x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הוכח: $g(x)=-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$. נמק את תשובתך.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}$. a הוא פרמטר, $a\neq 0$, $a\neq 4$.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a>0$ ובין $a<0$ במידת הצורך.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה־ x .

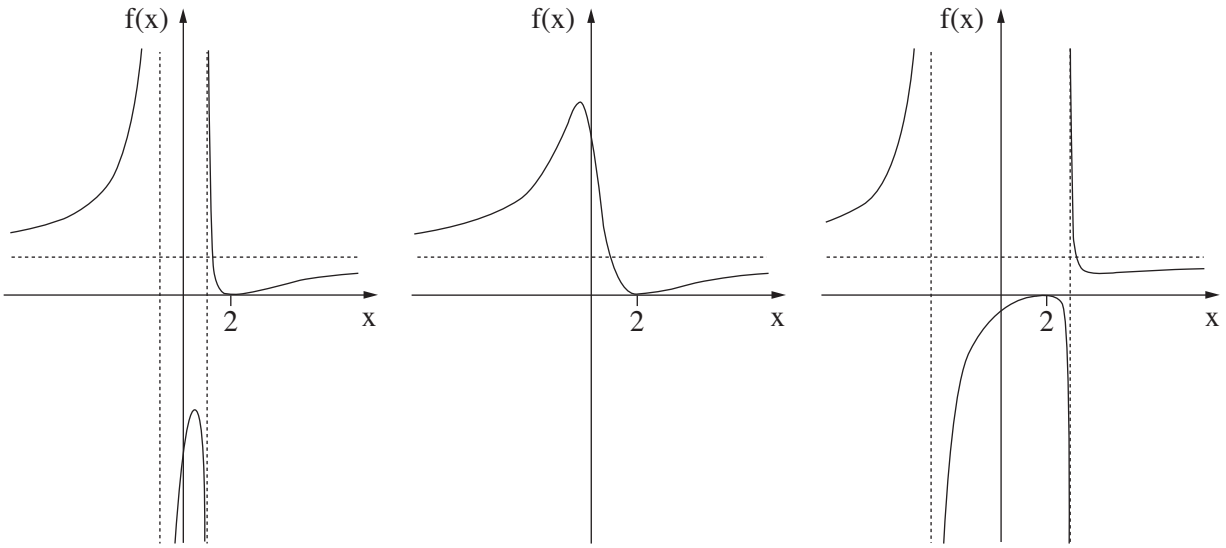
(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a>4$ ובין $a<4$ במידת הצורך.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f(x)$, כל אחד עבור ערך אחר של a .

כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I-III . נמק את תשובתך.



III II I

/המשך בעמוד 7/

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=t$.

נתון: $1\le t\le 5$.

המשיק חותך את ציר ה־ x בנקודה A ואת ציר ה־ y בנקודה B . הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

ב. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, חורף תשע"ח

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{18}{29}$$

שאלה 2

א. $a_{12} = 0$

ב. (1) כן, $a_{23} = -a_1$

(2) $n = 23$

ג. לא.

ד. אם האיבר הראשון שלילי, הסדרה עולה: 11 איברים שליליים.

אם האיבר הראשון חיובי, הסדרה יורדת: לא ניתן לדעת.

שאלה 3

א. על פאה אחת.

ב. 0.3466

ג. 0.5533

שאלה 4

א. הוכחה

ב. (1) הוכחה

(2) הוכחה

ג. הוכחה

שאלה 5

א. $125.67°, 54.33°$.

ב. $AC = 27.08$

ג. $S_{ABCD} = 171.73$

שאלה 6

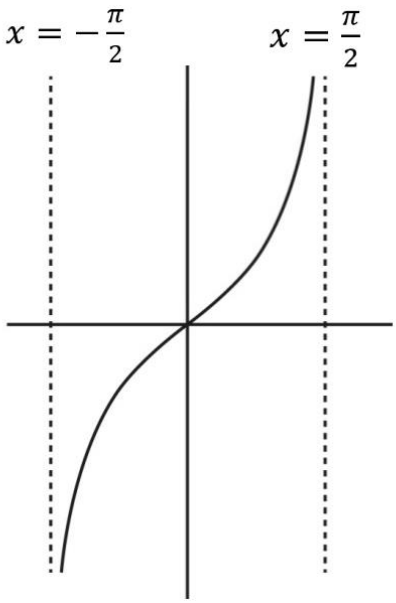
א. (1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

(2) $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$.

(3) עלייה: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

ירידה: אין.

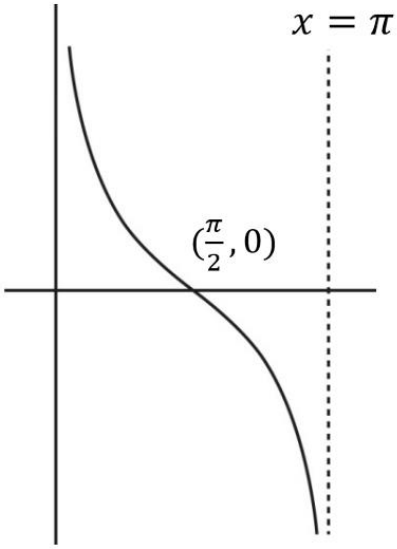
(4)



ב. (1) $0 < x < \pi$.

(2) הוכחה .

(3)



ג. 0 .

<u>שאלה 7</u>

א. (1) עבור $a < 0$: כל x .

עבור $a > 0$: $x \neq \sqrt{a}$, $x \neq -\sqrt{a}$.

(2) $(2,0)$, $(0, -\frac{4}{a})$.

(3) $y = 1$.

(4) עבור $a < 0$: אין .

עבור $a > 0$: $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$.

ב. עבור $a > 4$: מקסימום $(2,0)$, מינימום $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$.

עבור $a < 4$: מינימום $(2,0)$, מקסימום $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$.

ג. I. $a > 4$.

II. $a < 0$.

III. $0 < a < 4$.

<u>שאלה 8</u>

א. $x = \sqrt{3}$.

ב. $x = 5$.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ז, 2017, **מועד ב**
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־ 5 יחידות לימוד

מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית

שאלון ראשון מ־5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

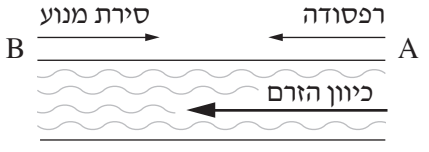
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. העיירות A ו־ B נמצאות על גדת נהר הזורם במהירות קבועה. כיוון הזרם הוא מ־ A ל־ B .
מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A .
הסירה שטה נגד כיוון הזרם.
באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A
לכיוון העיירה B . הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.



מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר.
מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם.

הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו־ 45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרכן. סירת המנוע הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיירה B .
כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B , הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק"מ מן העיירה B .

א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.

ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה.
כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה כללית a_n .

נסמן ב־S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $n > 1$ באמצעות n ו־k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + ...$ (סכום ריבועֵי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב־a_2).

ג. חשב את T .

/המשך בעמוד 4/

3. בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,

ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו־ 3 כדורים אדומים.

מוציאים באקראי כדור מקופסה I . אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II .

אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I .

שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I , ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II ,

ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I .

לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II .

א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.

חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.

ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.

ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.

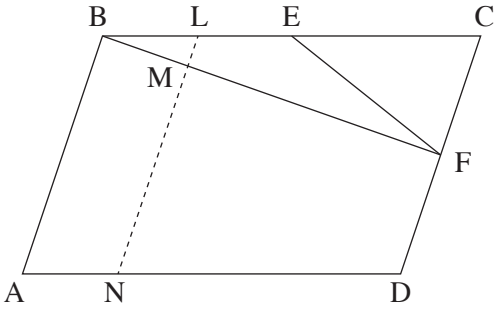
מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

/המשך בעמוד 5/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. המרובע ABCD הוא מקבילית.
הזווית A היא זווית חדה.
הנקודה E היא אמצע הצלע BC
והנקודה F היא אמצע הצלע CD
(ראה ציור).

א. שטח המשולש ECF הוא S .
הבע את שטח המקבילית ABCD
באמצעות S . נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE .
דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל־ AB וחותך את BF ואת AD
בנקודות M ו־ N בהתאמה.
חשב את היחס $\frac{LM}{MN}$.

ג. נתון $BE = EF$.
האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמק את קביעתך.

5. ABCD הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel DC$).
נתון: $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$) .
$\sphericalangle C = 60^o$.

א. הבע את שוקי הטרפז, BC ו־ AD , באמצעות a ו־ b .

נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$.

ב. חשב את b .

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R .
(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD .
(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r .

/המשך בעמוד 6/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה־ x .

ב. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

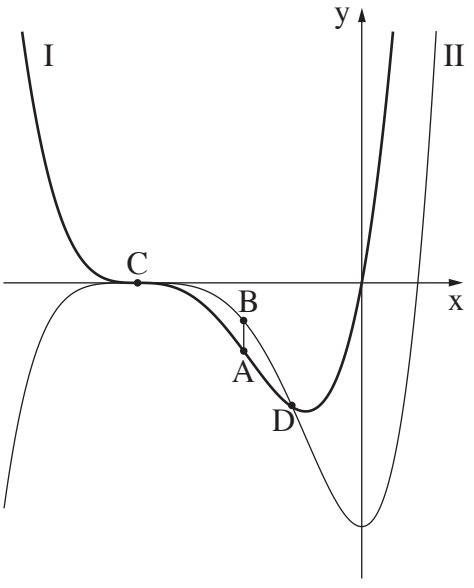
ד. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x) + k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

/המשך בעמוד 7/

7. לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$.



א. התאם בין הגרפים I ו־ II לבין הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$. נמק.

נתון: $f'(x) = x(x+b)^3$. $b > 1$ הוא פרמטר.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב־ $x = -1$.

ב. מצא את b .

C ו־ D הן נקודות החיתוך של הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$ בתחום $x < 0$, כמתואר בציור.

הנקודות A ו־ B נמצאות על הגרפים I ו־ II בהתאמה, כך שהישר AB מאונך לציר ה־ x .

נתון: $x_C < x_A < x_D$,

$x_C = -4$,

$x_D = 1 - \sqrt{5}$.

ג. מצא את שיעור ה־ x של הנקודות A ו־ B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי (אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).

/המשך בעמוד 8/

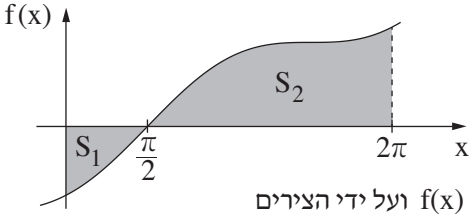
8. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x היא $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$ (השטח האפור בציור) שווה ל־ $10\pi^2 + 16$.

נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 8\pi^2$.



א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים (השטח S_1 המסומן בציור).

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.

ב. מצא את $F(\frac{\pi}{2})$.

נתון: $f'(x) = 8\sin x + 8$.

ג. מצא את $f(x)$.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, חורף תשע"ח

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

א. מהירות הזרם : 5 קמ"ש, מהירות הסירה : 20 קמ"ש.

ב. $6\frac{1}{4}$ שעות.

שאלה 2

א. $a_1 = k - \frac{1}{9}$, $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$

ב. $k = \frac{1}{3}$

ג. $T = \frac{1}{182}$

שאלה 3

א. מספר הכדורים הכחולים הוא 5.

ב. 0.3595

ג. 0.5338

שאלה 4

א. $S_{ABCD} = 8S$

ב. $\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}$

ג. לא ניתן לחסום את המרובע ABFD במעגל.

שאלה 5

א. $AD = BC = b - a$.

ב. $b = 12$.

ג. (1) $R = 6.11$.

(2) הוכחה.

(3) $r = 2\sqrt{3}$.

שאלה 6

א. (1) $x \neq 2$.

(2) $y = a$, $x = 2$.

(3) מינימום $(3, a-1)$.

(4) עלייה : $x > 3$ או $x < 2$. ירידה : $2 < x < 3$.

ב. $a = 1$.

ג.

ד. $k = 1$ או $k = -1$.

שאלה 7

א. I: $f'(x)$.

II: $f(x)$.

ב. $b = 4$.

ג. $x_A = x_B = -2$.

<u>שאלה 8</u>

א. $S_1 = \pi^2 + 8$.

ב. $f(\frac{\pi}{2}) = -\pi^2 - 8$.

ג. $f(x) = -8cosx + 8x - 4\pi$.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ז, 2017
מספר השאלון:	035581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית
שאלון ראשון מ־5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	— 40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	2×20	— 40 נקודות
			סה"כ		— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התִכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מן המשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. נֹגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירויות קבועות שונות.
בכל פעם, לאחר שעברה מִקְטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה, ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת.
במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ"ש.
נֹגה יצאה לדרך בשעה 8:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.

א. מהו אורך המסלול?

ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה 9:45 , ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול.
גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה 11:45 .
באיזה מארבעת מִקְטָעֵי המסלול פגש דניאל את נֹגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?

המשך בעמוד 3

2. נתונה הסדרה $a_n = \frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n}$.

b_n ו־ c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$.

נתון: $c_3 = \frac{1}{8}$, $b_6 = 64$.

א. (1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n .

(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n .

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב־ A_n ,

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן ב־ B_n ,

ואת סכום n האיברים הראשונים בסדרה c_n נסמן ב־ C_n .

ב. הראה ש־ $C_n = B_n - A_n$.

ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי־שוויון: $0.9 < B_n - A_n < 1$?

3. בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות שלְ־ 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל־ 3 מהם יש קלנועית.

מהי ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד שלְ־ 3 מהם בדיוק יש קלנועית.

מהי ההסתברות שייבָּחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 5-4 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

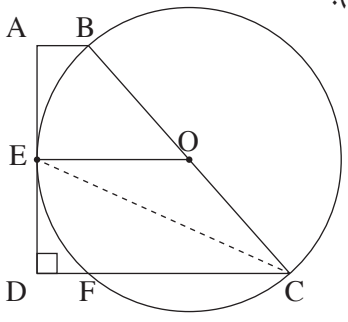
4. נתון מעגל שמרכזו O .

ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\sphericalangle ADC = 90^o$, $AB \parallel DC$).

הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E ,

והנקודות B ו־ C נמצאות על המעגל כך ש־ BC הוא קוטר.

הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F , כמתואר בציור.



א. הוכח: $\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle DEF$.

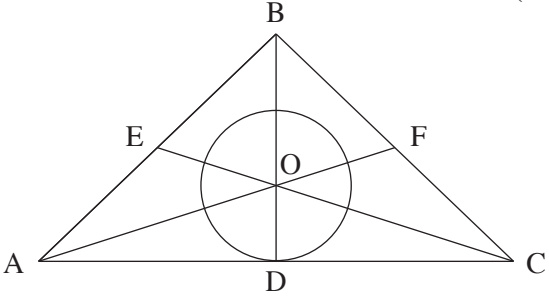
ב. הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta DFE$.

ג. הוכח: $BC = DF + DC$.

5. ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = BC)$.

AF , CE ו־ BD הם תיכונים במשולש,

הנחתכים בנקודה O (ראה ציור).



א. הוכח: $S_{\Delta BOE} = S_{\Delta COD}$.

מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC בנקודה D .

נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC .

ב. חשב את גודל הזווית ACE .

ג. הבע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=f(x+5)$.

ב. (1) הוכח ש־ $g(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הסבר מדוע לכל $1<a<b$ מתקיים השוויון: $\int_a^b g(x)\,dx=\int_{a+5}^{b+5} f(x)\,dx$.

המשך בעמוד 6

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

ג. נתון: $0<a<\frac{\pi}{2}$.

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $x=a$ וציר ה־ x שווה ל־ 1 .

מצא את a .

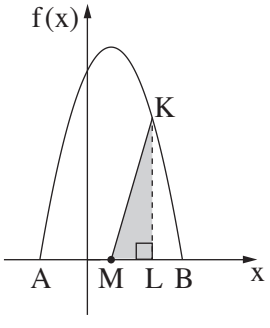
8. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+2x+c$

בתחום האי־שליליות שלה.

A ו־ B הן נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתון: $x_A=-t$, $x_B=2t$ $(t>0)$.

א. מצא את t ואת c .



M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה־ x .

K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$ מעל לציר ה־ x .

מהנקודה K הורידו אנך לציר ה־ x , החותך את הקטע AB בנקודה L .

ב. מצא עבור אילו שיעורי x של הנקודה K שטח המשולש KLM הוא מקסימלי.

מצא את שני הפתרונות האפשריים.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, קיץ תשע"ז מועד א

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

א. 40 ק"מ .

ב. במקטע השני בשעה 10:30 .

שאלה 2

א. (1) $b_1 = 2$, $q_b = 2$.

(2) $c_1 = \frac{1}{2}$, $q_c = \frac{1}{2}$.

ב. הוכחה.

ג. $n \geq 4$.

שאלה 3

א. $p = \frac{1}{5}$.

ב. $0.15534 = \frac{16}{103}$.

ג. $0.04096 = \frac{128}{3125}$

שאלה 4

א. הוכחה

ב. הוכחה

ג. הוכחה

שאלה 5

א. הוכחה.

ב. $\sphericalangle ACE = 17.66°$.

ג. $OE = \frac{R\sqrt{1+\pi^2}}{2} = 1.648R$

שאלה 6

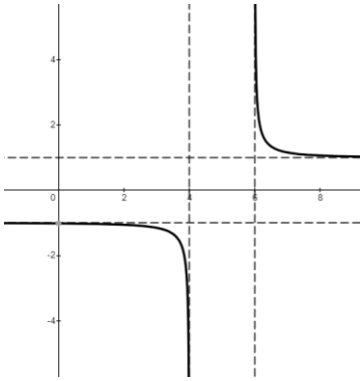
א. (1) $x > 6$ או $x < 4$.

(2) $(0, -1.02)$.

(3) $x = 4$, $x = 6$, $y = 1$, $y = -1$.

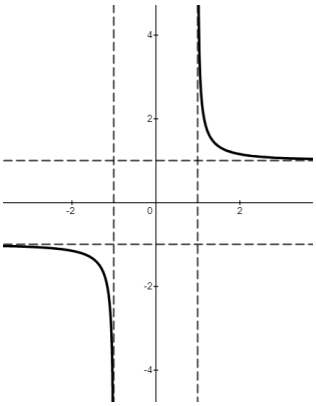
(4) עלייה: אין .

(5) ירידה: $x > 6$ או $x < 4$.



ב. (1) הוכחה .

(2)



ג. הוכחה .

<u>שאלה 7</u>

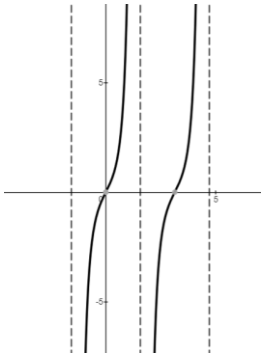
א. (1) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

(2) $(\pi k, 0)$.

(3) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

(4) f(x) עולה לכל x בתחום הגדרתה .

ב.



ג. $a = \frac{\pi}{4}$.

<u>שאלה 8</u>

א. $t = 2$, $c = 8$.

ב. $x = 1 + \sqrt{3}$ או $x = 1 - \sqrt{3}$.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: חורף תשע"ז, 2017
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית

שאלון ראשון מ־5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	20×2	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני צינורות א' ו־ ב' מזרימים מים לבריכה בקצב קבוע.

כאשר צינור א' בלבד פתוח, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ m שעות.

כאשר צינור ב' בלבד פתוח, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ $2m$ שעות.

כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ביותר מ־ 4 שעות.

ביום מסוים הבריכה הייתה ריקה. פתחו את צינור א' בלבד למשך שעתיים.

אחר כך פתחו גם את צינור ב', ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.

בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ־ $\frac{1}{2}$ הבריכה הייתה מלאה.

א. מצא את תחום הערכים האפשריים של m .

ב. ביום אחר $\frac{1}{2}$ הבריכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל תקלה טכנית צינור ב' רוקן מים מן הבריכה במקום למלא בה מים. שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א' מילא מים בבריכה וצינור ב' רוקן ממנה מים.

בתום אותה שעה תוקנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הבריכה יחד, עד שהיא התמלאה לגמרי כעבור שעתיים וחצי נוספות.

נתון שהקצב שבו צינור ב' מרוקן מים מהבריכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים.

מצא את m .

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה a_n המקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{4 \cdot a_n + 3}$, $a_1 = -1$.

נגדיר סדרה חדשה b_n : $b_n = \frac{1}{a_n} + 2$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$.

ג. נתון: n הוא מספר זוגי.

הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$.

3. אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חִצים למטרה.

הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P $(P > 0)$, ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.

כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.

הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P .

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם תמר משתתפת בַּמשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל־ P ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. תמר החטיאה בזריקה הראשונה.

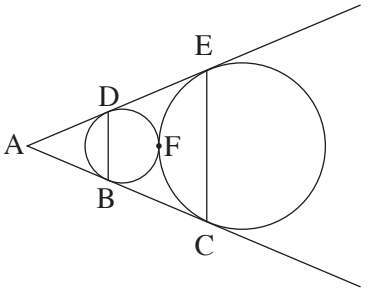
מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

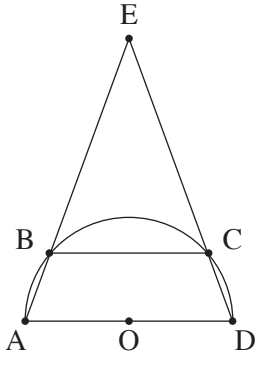


4. נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה,
המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F.
AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו־C,
AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו־E,
כמתואר בציור.

א. הוכח שהמרובע $BDEC$ הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. המשיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את שוקי הטרפז, BC ו־DE, בנקודות G ו־H בהתאמה.
הוכח: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

ג. נסמן ב־R את רדיוס המעגל הגדול וב־r את רדיוס המעגל הקטן.
הוכח כי $R \cdot BD = r \cdot CE$.



5. נתון טרפז $ABCD$ $(BC \parallel AD)$
החסום בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R
כך ש־AD הוא קוטר של חצי המעגל.
המשכי השוקיים AB ו־DC נפגשים
מחוץ למעגל בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle EAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות R ו־α את אורך הקטע BC.

ב. מהו התחום של כל הערכים האפשריים עבור הזווית α? נמק.

ג. נתון כי שטח משולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD.
מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED לבין R?

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^2+4x}{x^2+3x+b}$.

a ו־ b הם פרמטרים.

נתון: $x=1$, $y=1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b .

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים (מלבד $x=1$ ו־ $y=1$)? הסבר.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)|=-f(x)$? נמק.

ה. נגדיר $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$.

הראה כי השטח המוגבל על ידי ציר ה־ x , על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישר $x=0.5$ הוא $\frac{1}{3}$. נמק את תשובתך.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ו עבור $a>0$. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הנגזרת $f'(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ו. מצא את ערך הביטוי: $\int_{2a}^{3a} f(x)\,dx + \int_{-3a}^{-2a} f(x)\,dx$.

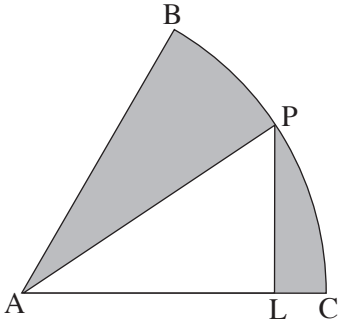
ענה על סעיף ז עבור $a=0$.

ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

/המשך בעמוד 7/

8. נתונה גזרת עיגול BAC שהיא $\frac{1}{6}$ מעיגול שרדיוסו R ומרכזו A .
מנקודה כלשהי P , הנמצאת על הקשת BC ,
הורידו אנך ל־ AC החותך את הרדיוס AC בנקודה L
(ראה ציור).
השטח האפור שבציור הוא השטח הכלוא בין הקשת BC
ובין הרדיוסים AB ו־ AP , והקטעים LP ו־ LC .
נתון שהשטח האפור המינימלי הוא $24\pi - 36$.



א. (1) מצא את הזווית PAC שעבורה
השטח האפור שמתקבל הוא מינימלי.
(2) מצא את R .

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש APL ? נמק.

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

<u>פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, חורף תשע"ז (2017)</u>

יש לענות על <u>שתיים</u> מן השאלות 1-3.

יש לענות על <u>אחת</u> מן השאלות 4-5.

יש לענות על <u>שתיים</u> מן השאלות 6-8.

<u>שאלה 1</u>

א. $6 < m < 10$.

ב. $m = 8.5$.

<u>שאלה 2</u>

א. הוכחה: $(q = 3)$.

ב. $S_n = \frac{3^n - 1}{2} - 2$.

ג. $S_n = \frac{1-3^n}{4}$.

<u>שאלה 3</u>

א. $p = \frac{5}{8}$.

ב. 0.7248 .

ג. (1) 0.5188 .

(2) 0.5188.

<u>שאלה 4</u>

א. הוכחה

ב. הוכחה

ג. הוכחה

<u>שאלה 5</u>

א. $BC = -2R\cos 2\alpha$.

ב. $45° < \alpha < 90°$.

ג. 1.59 .

<u>שאלה 6</u>

א. $b = -4 , a = 1$.

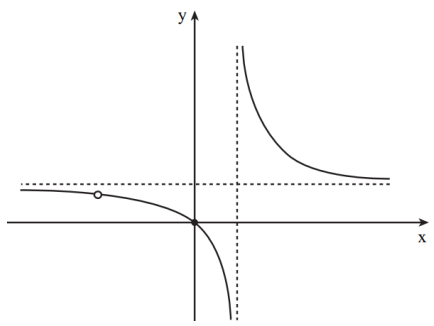
ב. (1) $x \neq 1 , x \neq -4$.

(2) $(0,0)$.

(3) אין. יש נקודת אי-רציפות סליקה ב- $(-4,\frac{4}{5})$ "חור" .

(4) עלייה: אין . ירידה: $x > 1$ או $-4 < x < 1$ או $x < -4$.

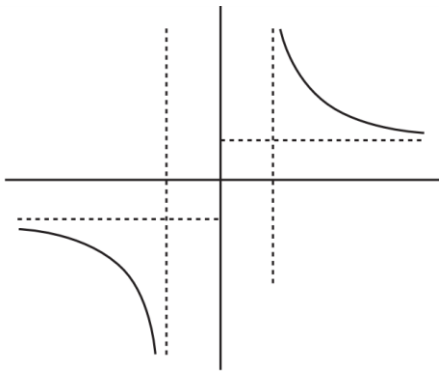
ג.



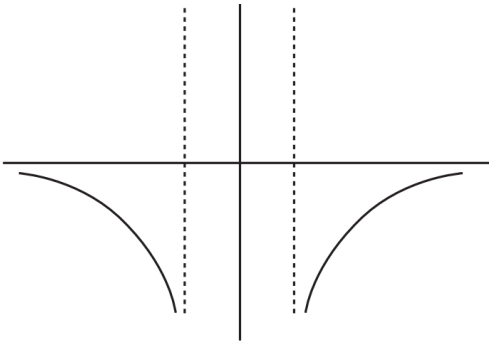
ד. $0 \le x < 1$.
ה. הוכחה.

<u>שאלה 7</u>

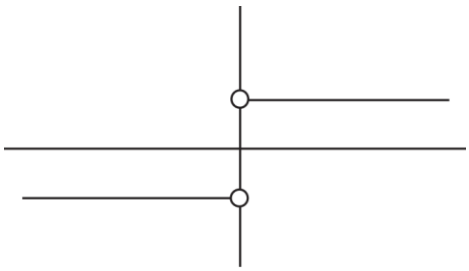
א. $x > a$ או $x < -a$.
ב. $x = a$, $x = -a$, $y = 1$, $y = -1$.
ג. ירידה: $x > a$ או $x < -a$, עלייה: אין.
ד.



ה. (1) $x = a$, $x = -a$, $y = 0$.
(2)



ו. ערך הביטוי שווה ל-0.
ז.



<u>שאלה 8</u>

א (1) $\frac{\pi}{4}$. (2) $R = 12$.
ב. 36 .

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ו, **מועד ב**
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מן המשגיח.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני הטכנאים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים. קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.

א. ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים אותו מספר של מחשבים.

גל התחיל לעבוד בשעה 8:00 , וסיים לעבוד בשעה 15:00 .

דני התחיל לעבוד לאחר השעה 8:00 ולפני השעה 9:00 , וסיים לעבוד בשעה 13:00 .

ידוע שגל ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים מהרגע שכל אחד מהם התחיל לעבוד ועד השעה 9:00.

כמה זמן אחרי השעה 8:00 התחיל דני לעבוד?

ב. ביום העבודה השני, התחילו גל ודני לעבוד באותה שעה וסיימו לעבוד באותה שעה.

ביום זה הם הרכיבו סך הכל יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.

כמה זמן עבדו הטכנאים ביום העבודה השני?

המשך בעמוד 3 ◀

2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3,

א. בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוסף, ונוצרה סדרה חשבונית חדשה.

(1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא $\frac{2n-1}{n}$.

(2) נתון כי היחס שמופיע בתת־סעיף (1) שווה ל־ 1.9.

סכום של כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5.

מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.

ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת k איברים בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה הנתונה. הבע באמצעות k את הפרש הסדרה המתקבלת.

3. שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.

יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים.

ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב־ 2 משחקים

או ב־ 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב־ 4 משחקים.

חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.

ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון — היא 0.34.

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

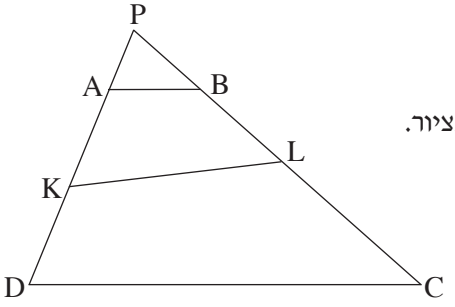
ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

המשך בעמוד 4 ◀

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. נתון משולש PDC .
הנקודות B ו־ L מונחות על הצלע PC .
הנקודות A ו־ K מונחות על הצלע PD , כמתואר בציור.
נתון כי המרובע ABLK הוא בר־חסימה במעגל
וגם המרובע KLCD הוא בר־חסימה במעגל.

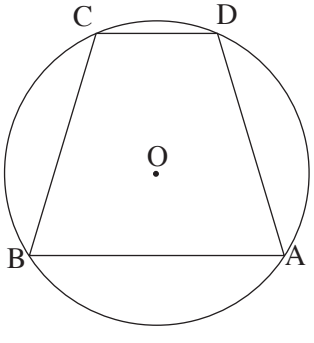
א. הוכח: $AB \parallel DC$.

נתון: $PA =$ 3 ס"מ , $PB =$ 4 ס"מ ,
שטח המשולש ABP הוא S סמ"ר,
שטח המרובע ABCD הוא 24S סמ"ר.

ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע ABCD ? נמק.

ג. מצא את אורך הצלע PD .

ד. נתון גם: $BL =$ 5 ס"מ .
היעזר בדמיון משולשים והבע באמצעות S את שטח המרובע KLCD .



5. במעגל חסום טרפז ABCD ($AB \parallel DC$).
מרכז המעגל O בתוך הטרפז (ראה ציור).
רדיוס המעגל הוא R וגובה הטרפז הוא h .
נתון: $\sphericalangle COD = \alpha$, $\sphericalangle BOA = 3\alpha$.

א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle DAB$.

ב. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו־ R .

ג. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו־ h .

ד. נתון כי שטח המשולש COD הוא $\frac{h^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.
מצא את α .

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x}$.

א. בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x (אם יש כאלה).

(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x (אם יש כאלה).

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:

(1) הראה שפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי ציר ה־ y .

המשך בעמוד 6 ◀

7. בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.

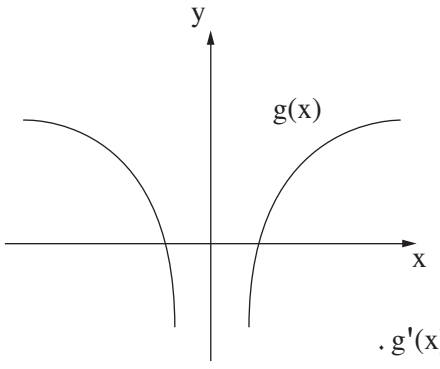
הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$

מוגדרות לכל x השונה מ־ 0 ,

ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.

הישר $x = 0$ הוא האסימפטוטה האנכית

לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.



א. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

נמק את שיקוליך.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$. נמק את שיקוליך.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$,

על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו־ $x = 2$ שווה ל־ 5.25 .

ב. הישר $x = 1$ חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$ בנקודה A ,

והישר $x = 2$ חותך גרף זה בנקודה B .

מצא את ההפרש בין שיעור ה־ y של הנקודה A ובין שיעור ה־ y של הנקודה B . נמק.

ג. הביטוי $y = \frac{a}{x^3}$ מתאר אחת מן הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

(1) קבע איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמק את קביעתך.

(2) מצא את הערך של a .

8. במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ABC = 90^o$) אורך היתר הוא k ס"מ (k הוא פרמטר).

הניצב AB הוא גם יתר במשולש ADB , שהוא שווה שוקיים וישר זווית ($\sphericalangle ADB = 90^o$).

א. סמן $AB = x$ והבע את BC באמצעות x ו־ k .

ב. נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה $BC \cdot AD^2$ הוא $3\sqrt{3}$.

מצא את שטח המשולש ADB (ערך מספרי), כאשר המכפלה $BC \cdot AD^2$ היא מקסימלית.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד ב תשע"ו (2016)

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

א. 20 דקות.
ב. 5.6 שעות (5 שעות ו-36 דקות) .

שאלה 2

א. (1) הוכחה.
(2) $a_1 = 1$.
ב. $d = \frac{3}{k+1}$

שאלה 3

א. $\frac{1}{2}$.
ב. 0.3 .
ג. $\frac{15}{34} = 0.4412$.

שאלה 4

א. הוכחה .
ב. לא .
ג. 15 ס"מ.
ד. 16S סמ"ר.

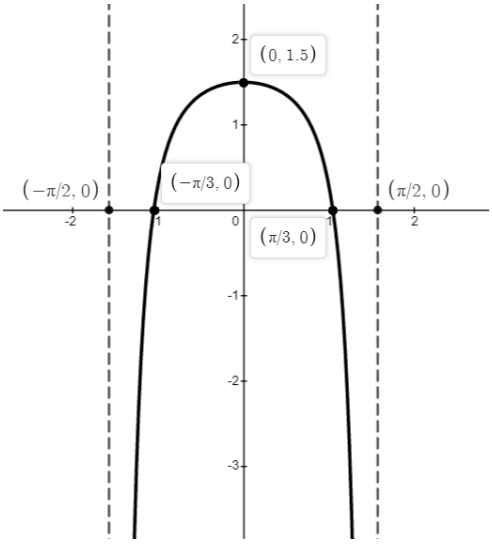
שאלה 5

א. $90° - \frac{\alpha}{2}$.
ב. $2R\cos\alpha$.
ג. $\frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.
ד. $30°$.

שאלה 6

א. (1) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.
(2) $x = \frac{\pi}{2}$.
(3) $(\frac{\pi}{4}, 0)$.
(4) $(0, \frac{1}{2})$ מקסימום קצה .

ב. (1) הוכחה .
(2)

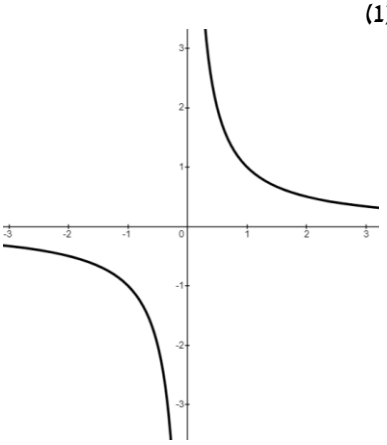


ג. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = 0.2854$ יח״ר.

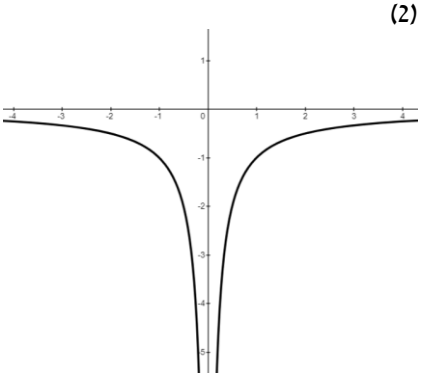
<u>שאלה 7</u>

א.

(1)



(2)



ב. $y_A - y_B = 5.25$

ג. (1) הביטוי $y = \frac{a}{x^3}$ מתאר את הפונקציה $g'(x)$.

(2) $a = 6$.

<u>שאלה 8</u>

א. $BC = \sqrt{k^2 - x^2}$.

ב. שטחו של משולש ADB הוא 1.5 יח״ר כאשר המכפלה $BC \cdot AD^2$ היא מקסימלית.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ו, 2016
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א' לעיר ב'.
המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק"מ.
המכונית הראשונה נסעה במהירות הגדולה ב־ 25 קמ"ש מהמהירות של המכונית השנייה.
כעבור 1.5 שעות מרגע היציאה מעיר א', הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה לחצי ממהירותה הקודמת, והגיעה לעיר ב' $\frac{1}{2}$ שעה אחרי המכונית השנייה.
   א. מצא את המהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ־ 60 קמ"ש.
   ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע היציאה מעיר א' ולפני שהמכונית השנייה השיגה את המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק"מ
   (מצא את שתי האפשרויות).

2. נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת: $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.
   א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

הסדרה S_n היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n : $S_1 , S_2 , S_3 , ...$
נתון כי $S_n = n \cdot a_n$ לכל n טבעי.
   ב. הראה כי הפרש הסדרה a_n הוא 0 .
   ג. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את a_1 .

נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n + S_n$ לכל n טבעי.
   ד. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את הסכום
$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + ... + (b_{20} - b_{19})$.

המשך בעמוד 3

3. במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.

40% היו ממושבים ו־ 40% היו מערים.

70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.

$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.

ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן.

מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?

(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 5-4 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתון טרפז ABCE $(AB \parallel EC)$

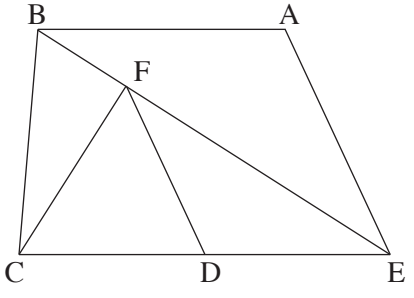
הנקודה F נמצאת על האלכסון BE

כך ש־ $CF \perp BE$.

הנקודה D היא אמצע הבסיס CE (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle CEB = \sphericalangle AEB$

$ED = 3a \quad , \quad EA = 4a$



א. הוכח כי $\Delta EAB \sim \Delta EDF$.

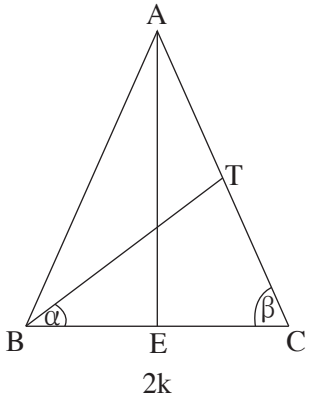
ב. נתון כי שטח המשולש EAB הוא S .

הבע באמצעות S את שטח המשולש CEF .

ג. המשך DF חותך את AB בנקודה G .

הבע באמצעות S את שטח המשולש BFG .

המשך בעמוד 4



5. נתון משולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$.

AE הוא גובה לבסיס BC ,

ו־ BT הוא תיכון לשוק AC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ACB = \beta$, $\sphericalangle TBC = \alpha$, $BC = 2k$

א. (1) הבע את האורך של TC באמצעות k ו־ β בלבד.

(2) היעזר בתת־סעיף א(1), והראה כי

$$\sin(\alpha + \beta) = 4\sin\alpha \cdot \cos\beta$$

ב. נתון גם: $TE =$ 5 ס"מ , $k =$ 4 ס"מ .

(1) מצא את β .

(2) מצא את α .

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \sin(2x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0$.

ענה על הסעיפים שלפניך עבור התחום הנתון.

א. מצא את השיפוע הגדול ביותר ואת השיפוע הקטן ביותר של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. (1) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

המשך בעמוד 5

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^3+2ax}{\sqrt{x^4+4x^2+4}}$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמק.

ג. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־x

ועל ידי הישרים $x=1$ ו־ $x=-1$, שווה ל־ 4 .

מצא את הערך של a .

ד. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $f(x)=g'(x)$.

אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ היא

נקודה שבה $x=0$.

(1) הראה כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=2x^2$.

(2) מצא את התחום שבו מתקיים $f(x)>g(x)$.

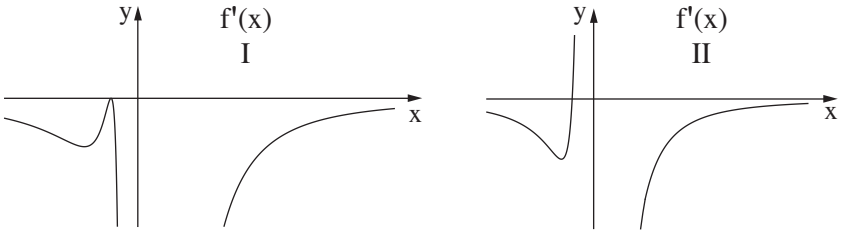
המשך בעמוד 6

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$, $x\neq 0$. n הוא מספר טבעי גדול מ־ 1 .

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. הראה כי עבור n אי־זוגי $f'(x)\leq 0$ לכל $x\neq 0$.

לפניך שני גרפים, I ו־ II . (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון.)



אחד הגרפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n זוגי,

והגרף האחר מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n אי־זוגי.

היעזר בגרפים I ו־ II , וענה על הסעיפים ג , ד , ו־ ה.

ג. עבור n אי־זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. עבור n זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונות הפונקציות: $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$, $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$.

מהו הסימן של המכפלה $g''(x)\cdot h''(x)$ עבור $x>0$? נמק.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

<u>פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד א תשע"ו (2016)</u>

יש לענות על <u>שתיים</u> מן השאלות 1-3.

יש לענות על <u>אחת</u> מן השאלות 4-5.

יש לענות על <u>שתיים</u> מן השאלות 6-8.

<u>שאלה 1</u>

א. מהירות המכונית השנייה היא 75 קמ"ש.
ב. המרחק בין המכוניות הוא 12.5 ק"מ כעבור חצי שעה או שעתיים וחצי מתחילת הנסיעה .

<u>שאלה 2</u>

א. $S_{19} = 1{,}064$.
ב. $d = 0$.
ג. המסקנה מסעיף קודם: הסדרה קבועה וכל איבריה שווים 56 . **האיבר הראשון שווה 56.**
ד. הסכום המבוקש הוא 11,704

<u>שאלה 3</u>

א. הסיכוי לבחור מבין הנכשלים תושב שאינו עירוני הוא $\frac{1}{2}$.
ב. (1) הסיכוי שמשה , אשר הצליח בבחינה, לא היה ממושב הוא $\frac{1}{2}$.
(2) ההסתברות שלפחות אחד מחמשת הנבחנים שהצליחו היה ממושב היא $1 - (\frac{1}{2})^5 = \frac{31}{32}$
ג. $\frac{15}{34} = 0.4412$.

<u>שאלה 4</u>

א. הוכחה .
ב. $\frac{9}{8}S$.
ג. $\frac{1}{16}S$.

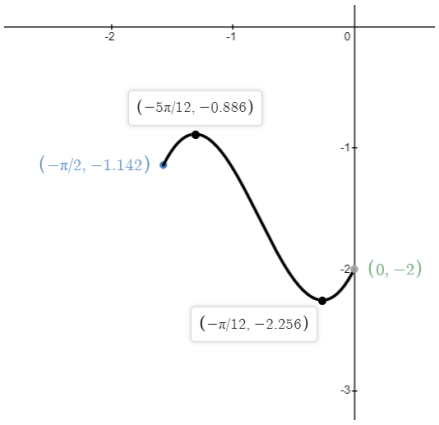
<u>שאלה 5</u>

א. (1) $TC = \frac{k}{2cos\beta}$.
(2) הוכחה .
ב. (1) $\beta = 66.42°$.
(2) $\alpha = 37.37°$

<u>שאלה 6</u>

א. השיפוע הגדול ביותר הוא: -0.866. השיפוע הקטן ביותר הוא: -2.256.

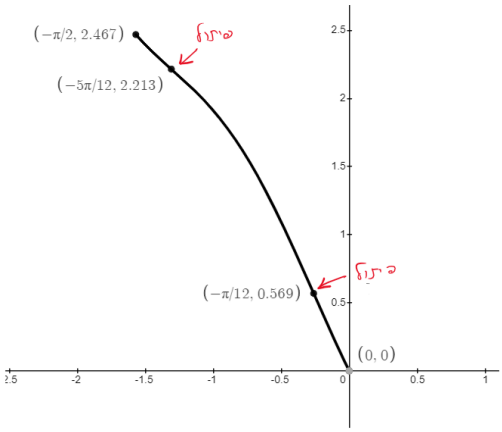
ב.



ג. (1) תחום קעירות כלפי מעלה של $f(x)$: $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{5}{12}\pi$ או $-\frac{\pi}{12} < x < 0$.

תחום קעירות כלפי מטה שלה $f(x)$: $-\frac{5}{12}\pi < x < -\frac{1}{12}\pi$.

(2)



<u>שאלה 7</u>

א. כל x .

ב. הפונקציה אי- זוגית.

ג. $a = 4$

ד. (1) הוכחה

(2) $0 < x < 2$

<u>שאלה 8</u>

א. $x = 0$.

ב. $y = 1$.

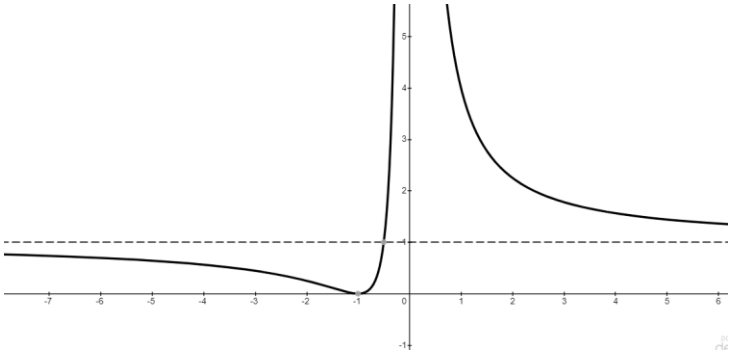
ג. (1) אין.

(2) שתי נקודות פיתול.

ד. (1) נקודת קיצון אחת.

(2) נקודת פיתול אחת.

(3)



ה. חיובי

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	חורף תשע"ו, 2016
מספר השאלון:	35581
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית

שאלון ראשון מ־5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	20×2	—	40 נקודות
			סה"כ		—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף /

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. רוכב אופניים ורוכב אופנוע יצאו באותו רגע זה לקראת זה משני יישובים שונים.

הם נפגשו כעבור 3 שעות.

רוכב האופנוע עובר $\frac{2}{3}$ מהדרך שבין שני היישובים ב־ 1.25 שעות פחות מהזמן שרוכב האופניים עובר $\frac{1}{4}$ מהדרך שבין שני היישובים.

מהירויות הרוכבים אינן משתנות.

א. מצא פי כמה המהירות של רוכב האופנוע גדולה מן המהירות של רוכב האופניים.

ב. מצא בכמה שעות עובר רוכב האופנוע את כל הדרך שבין שני היישובים.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית עולה: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots$

ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4

מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.

האיבר השישי בסדרה גדול ב־ 31 מהאיבר הראשון.

א. מצא את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו־ II:

I. $a_1 \cdot a_2 , a_2 \cdot a_3 , a_3 \cdot a_4 , \dots , a_n \cdot a_{n+1} , a_{n+1} \cdot a_{n+2}$

II. $\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} , \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3} , \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4} , \dots , \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.

הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730 .

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה I .

(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II .

3. במכונת מזל אפשר לזכות ב־ 50 שקל, ב־ 100 שקל או לא לזכות כלל.

דן משחק 5 משחקים במכונה זו.

ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות

שהוא יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעם אחת.

(ההסתברות לזכות ב־ 50 שקל שונה מאפס.)

ההסתברות שדן <u>לא</u> יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.

א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 100 שקל במשחק בודד?

ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב־ 100 שקל בדיוק.

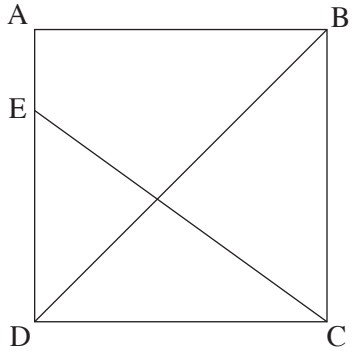
מהי ההסתברות שהוא <u>לא</u> זכה ב־ 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

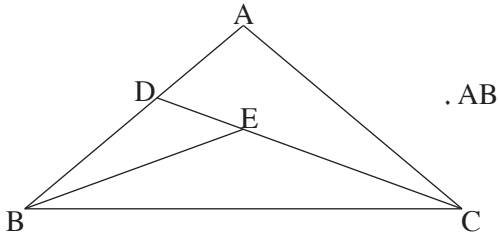


4. בריבוע ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD (ראה ציור).
מעגל העובר דרך הנקודות E , D ו־C חותך את האלכסון BD בנקודה M , ואת הצלע BC בנקודה N .
הנקודה M נמצאת בין הקדקוד B ובין נקודת החיתוך של BD עם CE .

א. הוכח כי $CD = EN$.

ב. האם הקטע DM קצר מהקטע CE , ארוך ממנו או שווה לו? נמק.

ג. הוכח כי $BM \cdot BD = AE \cdot AD$.



5. במשולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$ זווית הבסיס היא 2α .
הנקודה E היא מפגש חוצי־הזווית במשולש ABC .
המשך CE חותך את הצלע AB בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$, $\sphericalangle BAC > 90^{o}$.

א. מצא את α .

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC .

ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC הוא 2 ס"מ.
מצא את אורך הקטע AE .

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

(40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = a\cdot\sin^2 x + b\cdot\cos(4x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

a ו־ b הם פרמטרים.

לפונקציה $f(x)$ יש קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.

נתון כי $b < 0$.

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

ד. (1) מצא את הערך של האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x)\,dx$.

(2) בתחום $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2\pi}{3}$, הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה אחת שבה $x = k$.

בתחום $\frac{\pi}{2} \le x \le k$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, שווה ל־ S .

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = \frac{2\pi}{3}$ בתחום $k \le x \le \frac{2\pi}{3}$. נמק.

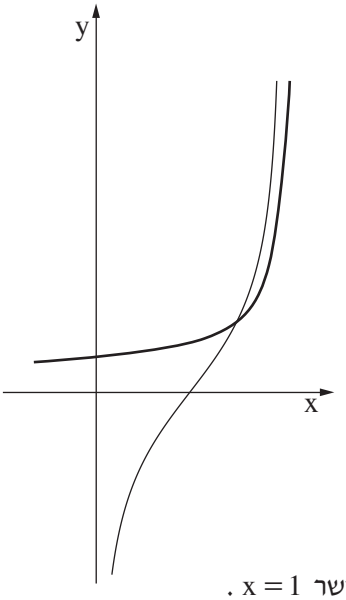
הערה: אין צורך למצוא את $f''(x)$.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$

$g(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$

(ראה ציור).



א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$,
ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים
של הפונקציה $f(x)$,
ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים
של הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים
של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x=1$.

ג. נתונות הפונקציות: $h(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}+2$, $t(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}+2$,

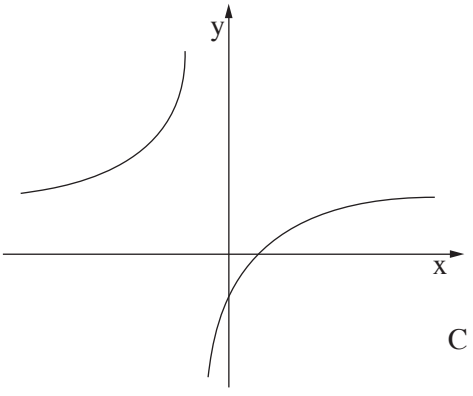
S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ ועל ידי הישר $x=2.5$.

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו־ $t(x)$ ועל ידי הישר $x=2.5$.

האם השטח S_1 גדול מהשטח S_2 , קטן ממנו או שווה לו? נמק.

/המשך בעמוד 7/

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$
(ראה ציור).



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה,
ואת האסימפטוטות של הפונקציה
המקבילות לצירים.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה־ x .
הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C
ואת הישר $y=2x$ בנקודה D .
נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה C ב־ t .
מצא מה צריך להיות הערך של t , כדי שהאורך של הקטע CD יהיה מינימלי:
(1) עבור $t>-1$.
(2) עבור $t<-1$.

ג. מצא את האורך המינימלי של הקטע CD עבור כל $t\neq-1$.

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

<u>פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד חורף תשע"ו (2016)</u>

יש לענות על <u>שתיים</u> מן השאלות 1-3.

יש לענות על <u>אחת</u> מן השאלות 4-5.

יש לענות על <u>שתיים</u> מן השאלות 6-8.

<u>שאלה 1</u>

א. פי 4.
ב. 3.75 שעות .

<u>שאלה 2</u>

א. $a_1 = 1$, $q = 2$.
ב. (1) סדרה I היא סדרה הנדסית עולה (המנה שלה היא 4),
סדרה II היא סדרה **קבועה** כלומר **אינה סדרה הנדסית עולה**.
(2) 6 איברים.
(3) 20.

<u>שאלה 3</u>

א. $\frac{1}{3}$.
ב. $\frac{1}{6}$.
ג. $\frac{3}{5}$.

<u>שאלה 4</u>

א. הוכחה .
ב.DM קצר מ-CE.
ג. הוכחה.

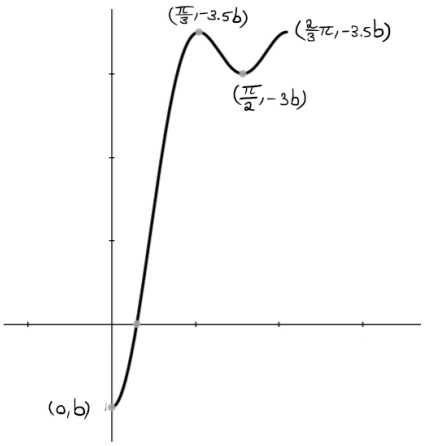
<u>שאלה 5</u>

א. $\alpha = 20°$.
ב. 2.79
ג. 1.459 ס"מ.

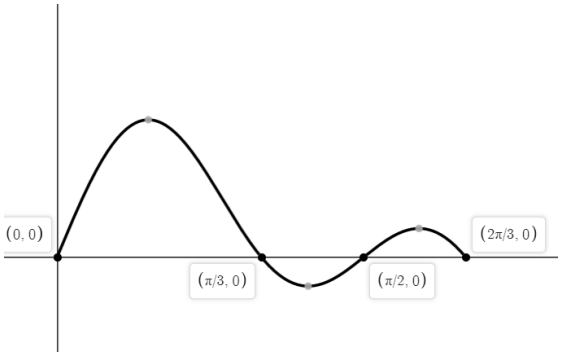
<u>שאלה 6</u>

א. $(0, b)$ מינימום, $(\frac{\pi}{3}, -3\frac{1}{2}b)$ מקסימום, $(\frac{\pi}{2}, -3b)$ מינימום, $(\frac{2}{3}\pi, -3\frac{1}{2}b)$ מקסימום.

ב.



ג.



ד. (1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} f''(x)dx = 0$.

(2) S .

<u>שאלה 7</u>

א. (1) $f(x)$: $x < 3$, $g(x)$: $0 < x < 3$.

(2) $f(x)$: $y = 0$, $x = 3$.

$g(x)$: $x = 0$, $x = 3$.

ב. 0.6945 .

ג. $S_1 = S_2$.

<u>שאלה 8</u>

א. תחום הגדרה : $x \neq -1$.

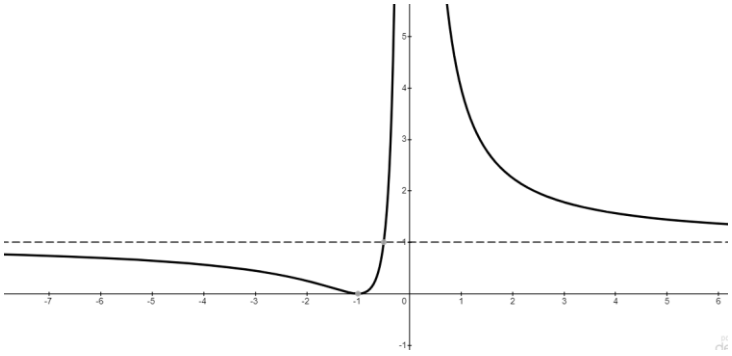
אסימפטוטה אנכית : $x = -1$.

אסימפטוטה אופקית : $y = 1$.

ב. (1) $t = 0$.

(2) $t = -2$.

ג. $\frac{1}{2}$.



ה. חיובי

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ה, **מועד ב**
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
			סה"כ		—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. בזמן הנסיעה באוטובוס הבחין יוסי ברגע מסוים באימא שלו,
ההולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס.
כעבור 10 שניות מהרגע שיוסי הבחין באימו, עצר האוטובוס בתחנה,
ויוסי רץ מיד כדי להשיג את אימו.
מהירות הריצה של יוסי גדולה פי 2 ממהירות ההליכה של אימו,
והיא $\frac{1}{7}$ ממהירות הנסיעה של האוטובוס.
כל המהירויות הן קבועות.

א. כמה זמן רץ יוסי כדי להשיג את אימו?

ברגע שיוסי השיג את אימו, הם הלכו יחד 3 דקות במהירות ההליכה של אימו
(בכיוון ההליכה שלה).
מיד בתום 3 הדקות רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה.
(מהירות הריצה של יוסי היא כמו בסעיף א.)

ב. כמה זמן רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס?

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל $b_{n+1} = \frac{1}{2^n \cdot b_n}$

א. הוכח כי האיברים העומדים במקומות האי־זוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית,
וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.

ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל־ $3\frac{7}{16}$.
מצא את b_1 (מצא את שתי האפשרויות).

3. חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.
חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית.
כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפטריה.
הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים
אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

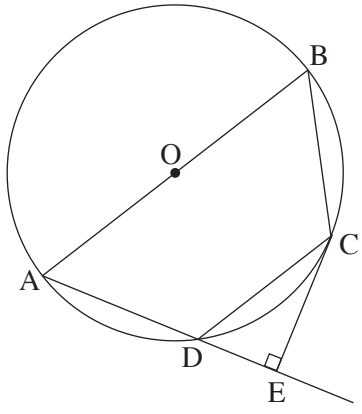
(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים
במשך היום?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 5-4 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O .

הצלע AB היא קוטר.

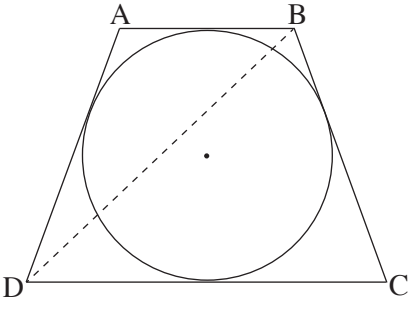
E היא נקודה על המשך AD כך ש־ $CE \perp AE$.

א. הוכח: $\Delta CDE \sim \Delta ABC$.

נתון גם: $OD \perp AC$, $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$.

ב. הוכח כי $OC \parallel AD$.

ג. הוכח כי CE משיק למעגל.



5. מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה־שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$), כמתואר בציור.

נתון: $\sphericalangle BCD = 70^o$.

א. הבע באמצעות r :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

(2) את שוק הטרפז.

(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x\cos x}$, ונתון התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א ו־ ב.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית או אי־זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-a$.

(1) מצא את הערכים האפשריים של a שעבורם יש למשוואה $f(x)-a=0$ פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ עבור כל אחד מהערכים של a שמצאת בתת־סעיף ב (1).

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

הישר $y = \frac{1}{3}x + 3$ חותך את הגרף של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ושל הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(6) הוסף לסקיצה שסרטטת בתת־סעיף ב (5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונות שתי משוואות, I ו־ II : $\text{I.}\ \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = k$, $\text{II.}\ \sqrt{x^2+9} = k$

נתון כי $k > 0$.

מצא את תחום הערכים של k שעבורם

אין פתרון למשוואה I וגם אין פתרון למשוואה II .

/המשך בעמוד 7/

8. נתונה הפונקציה $f(x)$, ונתון כי כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $f''(x)$ מוגדרת בתחום $x > 0$.

נתון גם: הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה שבה $x = 1$,

$f'(x)$ עולה בתחום $0 < x < 3$, ויורדת בתחום $x > 3$,

האסימפטוטות של $f'(x)$ הן $x = 0$ ו־ $y = 0$.

א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון גם כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה $x = 0$.

ב. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים בטווח $y \geq 4$ ורק אותם.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ציין על ציר ה־ x ועל ציר ה־ y את הערכים שמצאת.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -[f(x)]^3$.

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד ב קיץ תשע"ה (2015)

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

א. 150 שניות.
ב. 240 שניות.

שאלה 2

א. הוכחה $(q = \frac{1}{2})$.
ב. $\frac{1}{3}$ או $1\frac{1}{2}$.

שאלה 3

א. (1) 80% .
(2) 0.8322
ב. (1) 8% .
(2) $\frac{10}{11}$.

שאלה 4

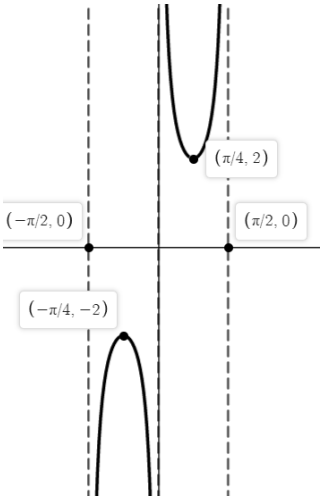
א. הוכחה .
ב. הוכחה .
ג. הוכחה.

שאלה 5

א. (1) $2.856r$.
(2) $2.128r$.
(3) $2.92r$.
ב. 0.6435 .

שאלה 6

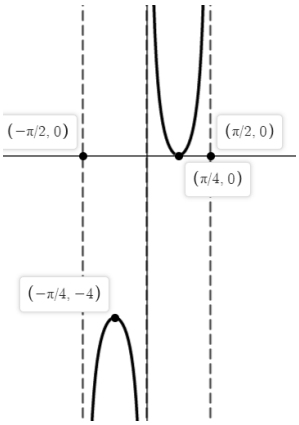
א. (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.
(2) אי-זוגית .
(3) $(\frac{\pi}{4}, 2)$ מינימום, $(-\frac{\pi}{4}, -2)$ מקסימום .
(4)



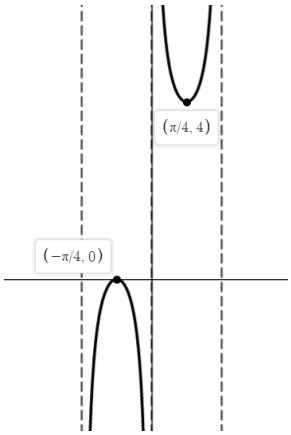
ב. (1) $a = -2$, $a = 2$.

(2)

$a = 2$



$a = -2$



ג.

ד. (1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} f''(x)dx = 0$.

(2) S .

<u>שאלה 7</u>

א. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

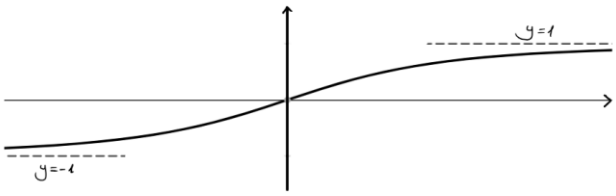
ב. (1) $f(x)$: כל x, $f'(x)$: כל x.

(2) $y = -1, y = 1$.

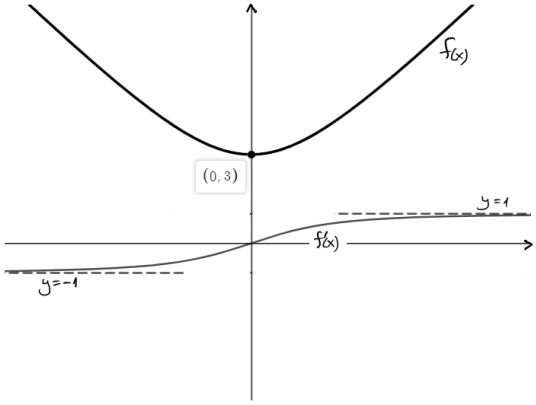
(3) $(0,0)$.

(4) עלייה : על x, ירידה : אין.

(5)



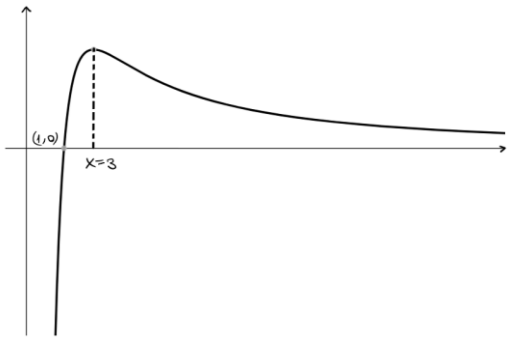
(6)



ג. $1 \leq k < 3$

<u>שאלה 8</u>

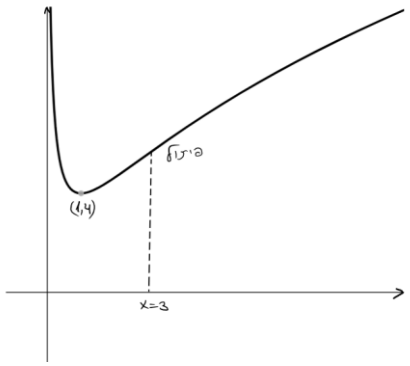
א.



ב. $x = 1$ מינימום.

ג. <u>קעירות כלפי מעלה</u>: $0 < x < 3$, <u>קעירות כלפי מטה</u>: $x > 3$.

ד.



ה. עליה : $0 < x < 1$, ירידה : $x > 1$.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ה, 2015
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
			סה"כ		—	100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, <u>גם</u> כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את <u>כל</u> פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. מכונית I ומכונית II יצאו באותו זמן מאותו מקום ולאותו כיוון.
המהירות של מכונית I הייתה 50 קמ"ש, והמהירות של מכונית II הייתה 40 קמ"ש.
כעבור חצי שעה מרגע היציאה של שתי המכוניות, יצאה גם מכונית III מאותו מקום ולאותו כיוון.
ברגע שמכונית III פגשה במכונית II, המרחק בין מכונית I למכונית II היה 15 ק"מ.
המהירויות של כל המכוניות היו קבועות.
   א. מצא את המהירות של מכונית III.
   ב. האם ייתכן שאחרי הפגישה בין מכונית III למכונית II, יהיה המרחק בין מכונית III למכונית I שווה למרחק בין מכונית II למכונית I? נמק.

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שכל איבריה חיוביים: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots$.
כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.
   א. מצא את המנה של הסדרה a_n.
   ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.
      (1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.
      (2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460.
      מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n.

המשך בעמוד 3

3. נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ־ 0), והשאר הן ספרות אי־זוגיות.

יוני יוצר מספר דו־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי־זוגי היא $\frac{4}{7}$.

מהו מספר הספרות האי־זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמילי יוצרת מספר תלת־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.

מהי ההסתברות שבמספר התלת־ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. PA ו־ PB משיקים למעגל שמרכזו O .

המשך BO חותך את המעגל בנקודה D (ראה ציור).

א. הוכח: $PO \parallel AD$.

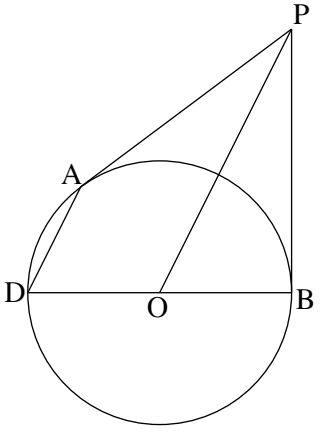
הנקודה C נמצאת על הקוטר DB כך ש־ $AC \perp DB$.

ב. הוכח: $\Delta ADC \sim \Delta POB$.

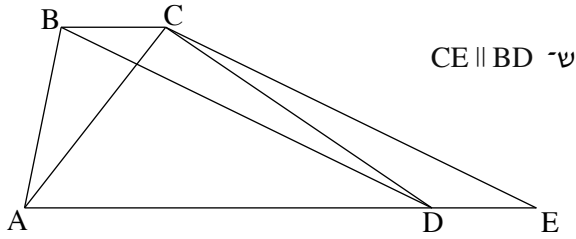
PD חותך את AC בנקודה E .

ג. הוכח: $\Delta DEC \sim \Delta DPB$.

ד. הוכח: $AC = 2EC$.



המשך בעמוד 4



5. נתון טרפז $ABCD$ $(BC \parallel AD)$.

הנקודה E נמצאת על המשך AD כך ש־ $CE \parallel BD$

(ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle CAD = 2\sphericalangle DBC$

$DB = 1.8AC$

א. מצא את גודל הזווית CEA.

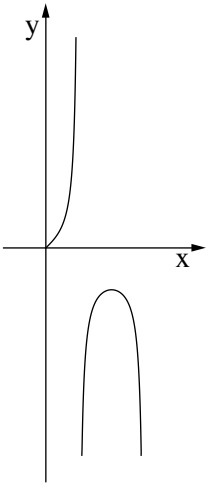
ב. נתון גם כי שטח המשולש ACE הוא 87.873 סמ"ר.

מצא את גובה הטרפז.

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$

(ראה ציור).

ענה על הסעיפים א, ב ו־ג עבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבע את סוגן על פי הציור.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$.

מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,

על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{6}$.

המשך בעמוד 5

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד.

על סמך הגרף של הפונקציה $f(x)$, ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים,

גדול מ־ 4 , קטן מ־ 4 או שווה ל־ 4 ? נמק.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a^2x+a^2$, a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. הראה כי המקסימום של הפונקציה מתקבל בנקודה שבה $y>0$.

ב. מצא עבור איזה ערך/איזה תחום ערכים של a נקודת המינימום של הפונקציה:

(1) נמצאת על ציר ה־ x .

(2) נמצאת מעל ציר ה־ x .

(3) נמצאת מתחת לציר ה־ x .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל אחד משלושת המקרים שבסעיף ב.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{1}{3}x^3-x+1=0$? נמק.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד א קיץ תשע"ה (2015)

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

א. 60 קמ"ש.
ב. לא ייתכן.

שאלה 2

א. $\frac{1}{2}$.
ב. (1) הוכחה . מנת הסדרה b_n היא 2.
(2) $\frac{1}{20}$.

שאלה 3

א. 4 ספרות אי-זוגיות.
ב. $\frac{1}{3}$.
ג. $\frac{7}{15}$.

שאלה 4

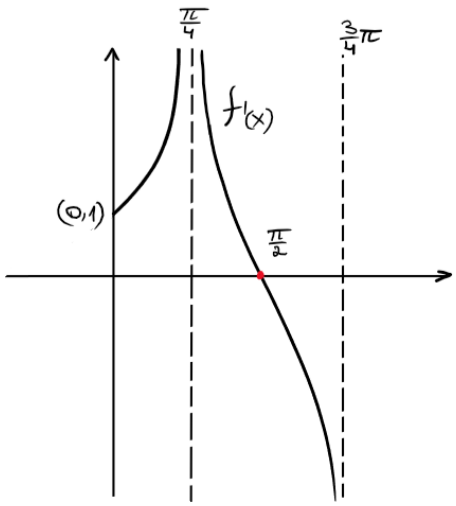
א. הוכחה .
ב. הוכחה .
ג. הוכחה.
ד. הוכחה.

שאלה 5

א. $25.84°$.
ב. 7.845 ס"מ.

שאלה 6

א. (1) $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ או $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.
(2) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.
(3) $(0,0)$ מינימום, $(\frac{\pi}{2}, -1)$ מקסימום .
ב.



ג. 1.

<u>שאלה 7</u>

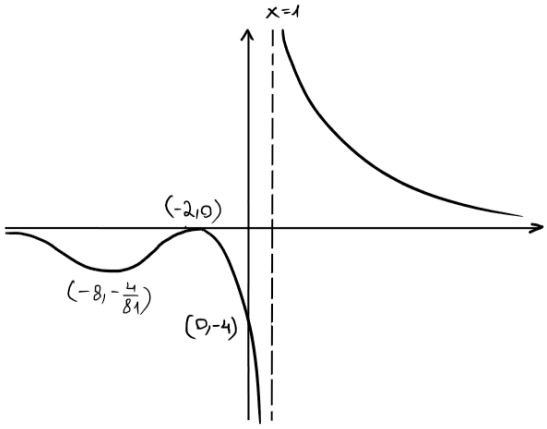
א. (1) $x \neq 1$

(2) $y = 0$, $x = 1$.

(3) $(-2,0)$, $(0,-4)$.

(4) $(-2,0)$ מקסימום, $(-8,-\frac{4}{81})$ מינימום.

(5)



ב. נקודת פיתול אחת נמצאת בתחום $x < -8$ ונקודת פיתול שניה נמצאת בתחום $-8 < x < -2$.

ג. השטח קטן מ-4.

<u>שאלה 8</u>

א. שיעור ה-y בנקודת המקסימום הוא : $\frac{2}{3}a^3 + a^2$. מאחר ו-$a > 0$ שיעור ה-y הוא חיובי.

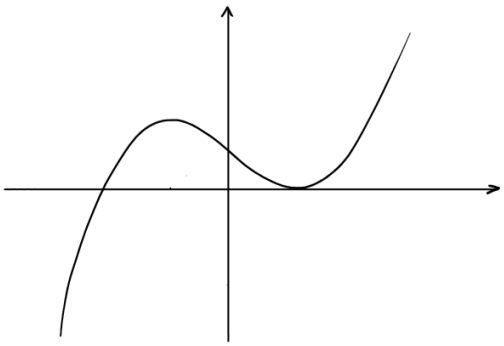
ב. (1) $a = 1.5$

(2) $0 < a < 1.5$.

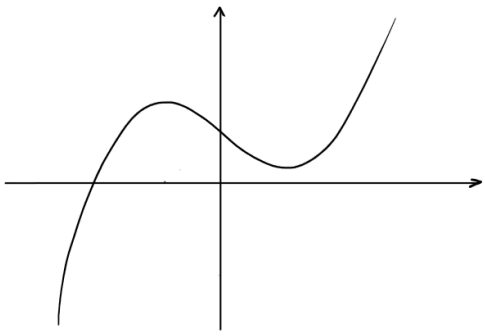
(3) $a > 1.5$.

ג.

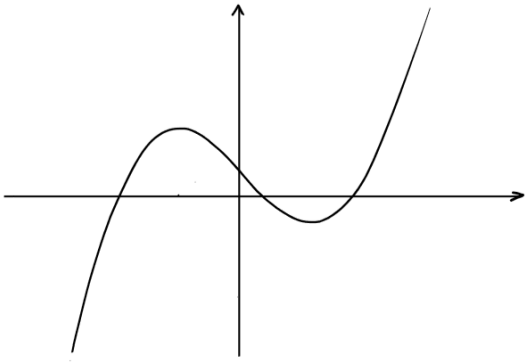
עבור $a = 1.5$



עבור $0 < a < 1.5$



עבור $a > 1.5$



ד. פתרון אחד.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	חורף תשע"ה, 2015
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
			סה"כ		—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. צַבָּעים ותיקים וצַבָּעים מתלמדים צריכים לצבוע מספר מסוים של דלתות.

צַבָּע אחד ותיק ו־ 2 צַבָּעים מתלמדים יסיימו את הצביעה בזמן הארוך ב־ 25% מהזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צַבָּעים ותיקים וצַבָּע אחד מתלמד.

לכל צבע ותיק אותו קצב עבודה בלתי משתנה, ולכל צבע מתלמד אותו קצב עבודה בלתי משתנה. (צבע ותיק עובד מהר יותר מצבע מתלמד).

א. מצא את היחס בין הזמן שצבע מתלמד יסיים לבדו את צביעת הדלתות לבין הזמן שצבע ותיק יסיים לבדו את צביעת הדלתות.

ב. מצא כמה צבעים מתלמדים צריכים לעבוד עם צבע אחד ותיק, כדי שהם יסיימו את צביעת הדלתות במשך אותו הזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מתלמד.

המשך בעמוד 3 ◀

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = 4$$

$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

3. ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?

ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.

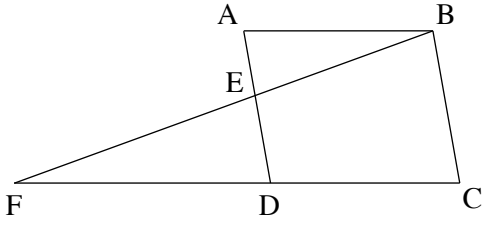
מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?

המשך בעמוד 4 ◀

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

המשך BE חותך את המשך CD בנקודה F (ראה ציור).

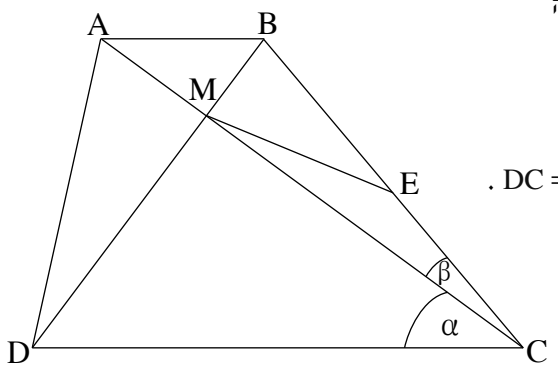
נתון: שטח המשולש ABE הוא 27 סמ"ר.

שטח המשולש DFE הוא 48 סמ"ר.

א. מצא את שטח המשולש BED.

ב. נתון גם כי המרובע BCDE הוא בר חסימה במעגל.

מצא את היחס $\frac{AB}{EF}$.



5. אלכסוני הטרפז ABCD מאונכים זה לזה ונפגשים בנקודה M.

E היא אמצע השוק BC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \beta$, $DC = a$.

א. הבע באמצעות a , α ו־ β את האורך של ME.

נתון: $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3}$, $a =$ 6.6 ס"מ.

ב. מצא את האורך של AB.

נתון גם: $BM =$ 1.3 ס"מ.

ג. מצא את הזווית DCB.

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

(40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונות שתי פונקציות:

$f(x) = 0.5\sin(2x) + \cos x$

$g(x) = \sin(2x)$

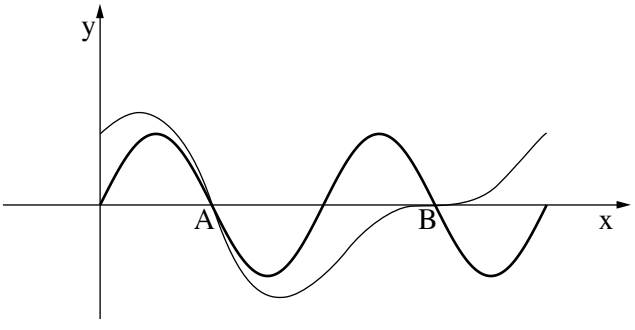
בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

בתחום הנתון

הגרפים של הפונקציות

נפגשים בשתי נקודות, A ו־ B ,

הנמצאות על ציר ה־ x , כמתואר בציור.



א. דרך נקודה על ציר ה־ x , הנמצאת בין הנקודות A ו־ B , מעבירים אנך לציר ה־ x .

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ בנקודות M ו־ N .

מצא את האורך המקסימלי של הקטע MN .

ב. דרך נקודה על ציר ה־ x , הנמצאת בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, מעבירים אנך לציר ה־ x .

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ בנקודות K ו־ L .

מצא את האורך המקסימלי של הקטע KL .

המשך בעמוד 6

7. נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$$

א. מצא עבור כל אחת מהפונקציות:

(1) את תחום ההגדרה.

(2) את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=g(x)-k$, $k>0$.

עבור אילו ערכים של k אין לפונקציה $h(x)$ נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$? נמק.

8. נתון כי הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מקיימות $\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}dx=3$.

נתון גם: $f'(x)=kx+2$, $f(0)=1$. k הוא פרמטר.

א. מצא את הערך המספרי של $f(3)$, ומצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

(1) הראה כי $g(x)=|x+1|$.

(2) סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד א חורף תשע"ה (2015)

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

א. יחס הזמנים הוא 2.
ב. 3 צבעים מתלמדים.

שאלה 2

א. $a_{50} + a_{51} = 202$.
ב. $a_{n+2} - a_n = 4$.
ג. $a_{51} = 104$.
ד. $S_{101} = 10{,}304$.

שאלה 3

א. $\frac{64}{729}$.
ב. $\frac{8}{11}$.

שאלה 4

א. 36 סמ"ר .
ב. $\frac{AB}{EF} = \frac{3}{4}$.

שאלה 5

א. $\frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}$
ב. 2.2 ס"מ.
ג. $49.94°$.

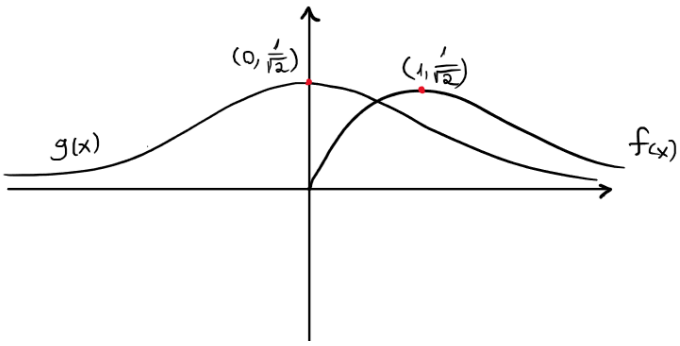
שאלה 6

א. $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$
ב. 1.

שאלה 7

א. (1) $f(x): x \geq 0$, $g(x)$: כל x.
(2) $f(x): y = 0$, $g(x): y = 0$.
(3) $f(x)$: $(0,0)$ מינימום , $(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ מקסימום.
$g(x)$: $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ מקסימום.

ב.



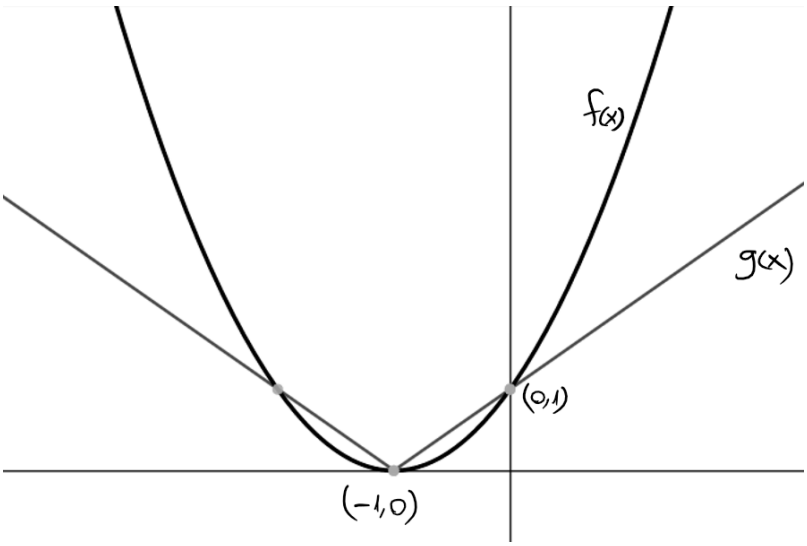
ג. $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>שאלה 8</u>

א. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $f(3) = 16$.

ב. (1) $g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

(2)



מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	דצמבר 2014, תשע"ה, **מועד ד**
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. מכונית א יצאה מעיר A ומכונית ב יצאה מעיר B . שתי המכוניות נסעו זו לקראת זו עד שנפגשו בנקודה C , ושם עצרו.

מכונית א יצאה לפני מכונית ב. זמן הנסיעה של מכונית א היה גדול פי $2\frac{1}{4}$ מזמן הנסיעה של מכונית ב. מכונית א עברה 150 ק"מ יותר ממכונית ב.

למחרת המשיכה מכונית א לנסוע מ־ C עד שהגיעה ל־ B , ומכונית ב המשיכה לנסוע מ־ C עד שהגיעה ל־ A .

ביום זה היה זמן הנסיעה של מכונית א שווה לזמן הנסיעה של מכונית ב.

לשתי המכוניות מהירות קבועה.

א. מצא את המרחק מ־ A ל־ B .

ב. ביום השלישי יצאו שוב שתי המכוניות זו לקראת זו, מכונית א מעיר B ומכונית ב מעיר A . שתי המכוניות יצאו באותו זמן, ונסעו במהירות הקבועה שלהן. הן נפגשו כעבור 6 שעות. מצא את המהירות של כל אחת מן המכוניות.

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n$.

נתון: $a_1 = 4$, $a_n = 310$, הפרש הסדרה הוא 3 .

יצרו סדרה חדשה מכל האיברים של הסדרה הנתונה. כל איבר בסדרה החדשה הוא הסכום של שני איברים עוקבים בסדרה הנתונה.

הסדרה החדשה היא: $a_1 + a_2 \quad , \quad a_2 + a_3 \quad , \quad a_3 + a_4 \quad , \quad ....$

א. מצא את מספר האיברים בסדרה החדשה.

ב. הוכח שהסדרה החדשה היא חשבונית, וחשב את סכומה.

ג. בסדרה החדשה מחקו איברים על פי החוקיות הזאת: את האיבר השני, האיבר השישי, האיבר העשירי וכן הלאה.

המקומות של האיברים שנמחקו יוצרים סדרה חשבונית ... 10 , 6 , 2 .

כמה איברים נמחקו בסדרה החדשה?

המשך בעמוד 3

3. ההסתברות של תלמיד כלשהו לעבור מבחן נהיגה היא p $(p > 0)$.

תלמיד ניגש למבחן. אם הוא לא עובר את המבחן הוא ניגש שוב, עד שיצליח לעבור את המבחן.

לתלמיד יש אותו סיכוי לעבור את המבחן בכל פעם שהוא נבחן.

ידוע שההסתברות שתלמיד יעבור את המבחן בפעם הראשונה גדולה פי $\frac{27}{8}$ מההסתברות שיעבור את המבחן רק בפעם הרביעית.

א. חשב את p.

ב. אם ידוע שתלמיד יעבור את המבחן לאחר 2 מבחנים לכל היותר, מהי ההסתברות שיעבור רק בפעם השנייה?

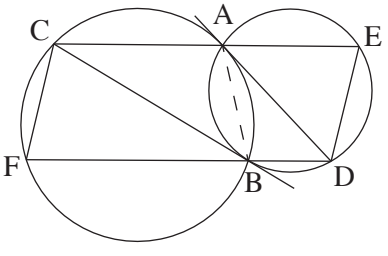
ג. שני תלמידים ניגשים למבחן.

מהי ההסתברות ששני התלמידים יחד יזדקקו סך הכול ל־ 3 מבחנים בדיוק, עד ששניהם יעברו את המבחן?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו־ B.

המיתר AD משיק למעגל השמאלי בנקודה A.

המיתר CB משיק למעגל הימני בנקודה B.

המשך המיתר CA חותך את המעגל הימני בנקודה E,

והמשך המיתר DB חותך את המעגל השמאלי בנקודה F

(ראה ציור).

א. הוכח: $\sphericalangle AED + \sphericalangle FCA = 180^{o}$.

ב. הוכח: המרובע CEDF הוא מקבילית.

ג. נתון: $BD =$ 4 ס"מ, $AC =$ 9 ס"מ.

מצא פי כמה גדול שטח ΔABC משטח ΔBDA.

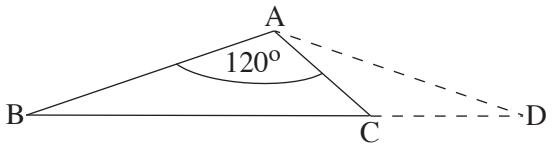
המשך בעמוד 4

.5 לפניך משולש ABC .

נתון: $AB = 2AC$

$\sphericalangle BAC = 120^o$

h הוא הגובה לצלע BC .



א. הבע באמצעות h את שטח המשולש ABC .

המשיכו את BC עד לנקודה D (ראה ציור). רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ADC .

ב. חשב את $\sphericalangle ADC$.

ג. נתון גם: $AD = h + 6$. חשב את h .

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sin x} - a\sin x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$, a הוא פרמטר חיובי .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. רשום את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לציר ה־ x .

ג. הוכח שהפונקציה היא אי־זוגית.

ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$ בתחום $0 < x < \pi$.

היעזר בסעיפים הקודמים והראה שהפונקציה $g(x)$ היא אי־שלילית.

המשך בעמוד 5

7. נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו R .

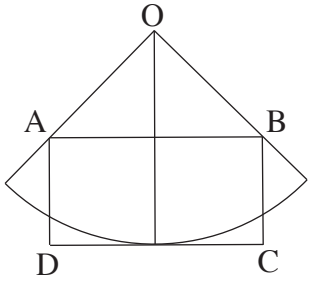
בונים מלבן ABCD כך שרבע המעגל משיק לצלע DC

בנקודת האמצע שלה, והקדקודים A ו־ B נמצאים

על הרדיוסים, כמתואר בציור.

מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים באופן זה,

הבע באמצעות R את אורך האלכסון הקצר ביותר.



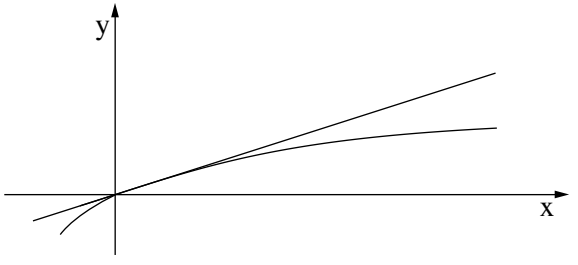
8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}$,

a הוא פרמטר חיובי.

העבירו משיק לגרף הפונקציה

בנקודה $x = 0$ (ראה ציור).

המשיק עובר בנקודה $(3 , 1)$.



א. מצא את a .

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, על ידי גרף הפונקציה ועל ידי הישר $x = 4$.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת לכל x : $g''(x) = f(x)$, $g'(0) = 5$.

האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד ד קיץ תשע"ד (2014)

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

א. 750 ק"מ.
ב. מהירות מכונית א: 50 קמ"ש.
מהירות מכונית ב: 75 קמ"ש.

שאלה 2

א. בסדרה החדשה יש 102 איברים.
ב. $S_{102} = 32,028$.
ג. נמחקו 26 איברים.

שאלה 3

א. $p = \frac{1}{3}$.
ב. 0.4 .
ג. $\frac{4}{27}$

שאלה 4

א. הוכחה .
ב. הוכחה .
ג. $S_{\Delta ABC} = \frac{9}{4} S_{\Delta BDA}$ פי 2.25.

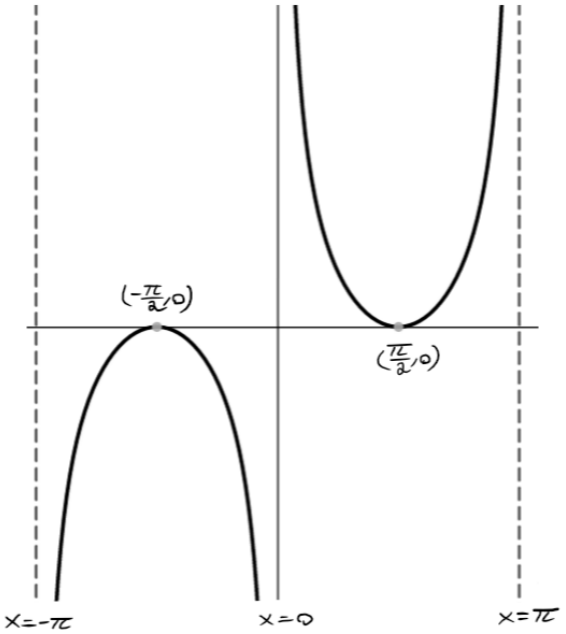
שאלה 5

א. $\frac{7h^2}{2\sqrt{3}}$.
ב. $\sphericalangle ADC = 19.11°$.
ג. $h = 2.921$.

שאלה 6

א. תחום הגדרה: $-\pi < x < \pi$, $x \neq 0$.
ב. $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$.
ג. הוכחה.
ד. $(\frac{\pi}{2}, 0)$ מינימום, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ מקסימום.

ה.



ו. הוכחה.

<u>שאלה 7</u>

אורך האלכסון הקצר ביותר הוא $\frac{2\sqrt{5}}{5}R$

<u>שאלה 8</u>

א. $a=9$.

ב. כל x.

ג. $\frac{2}{3}$.

ד. לא. לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	תשע"ד, **מועד ג**
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני פועלים, פועל I ופועל II, מתקנים כביש. ההספק של כל אחד משני הפועלים קבוע.
ביום הראשון עבד פועל I לבד 4 שעות, ואז הצטרף אליו פועל II, והם עבדו יחד עוד 3 שעות.
התברר כי ביום הראשון ביצעו הפועלים סך הכול 60% מהתיקון כולו.
ביום השני עבדו הפועלים יחד כל הזמן כך שסך הכול בשני ימי העבודה ביצע כל אחד מהפועלים בדיוק מחצית מהתיקון כולו.
מצא כמה שעות עבדו הפועלים יחד ביום השני.

2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים $(n > 2)$:

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ \dots \ , \ a_{n-1} \ , \ a_n$$

הפרש הסדרה הנתונה הוא d.
מהסדרה הנתונה בנו סדרה חדשה של הפרשי ריבועים:

$$a_2^2 - a_1^2 \ , \ a_3^2 - a_2^2 \ , \ \dots \ , \ a_n^2 - a_{n-1}^2$$

א. הוכח כי הסדרה החדשה היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא $2d^2$.

ב. נתון: $a_2^2 - a_1^2 = 64$
הבע את האיבר האחרון בסדרה החדשה באמצעות n ו־d.

ג. נתון גם: $a_n^2 - a_{n-1}^2 = 192 \ , \ d^2 > 1$
מצא את תחום הערכים של n.

המשך בעמוד 3

3. מבין העובדים בחברה גדולה בוחרים באקראי 4 עובדים.

ההסתברות שלכל היותר ל־ 3 עובדים יש השכלה גבוהה היא $\frac{255}{256}$.

א. לאיזה אחוז מהעובדים יש השכלה גבוהה?

ב. מהי ההסתברות שמבין 4 עובדים שבוחרים באקראי, ל־ 3 אין השכלה גבוהה?

ג. 40% מעובדי החברה הן נשים.

ל־ $\frac{1}{4}$ מהנשים יש השכלה גבוהה.

מבין העובדים שיש להם השכלה גבוהה בחרו באקראי שני עובדים.

מהי ההסתברות ששני העובדים הם נשים?

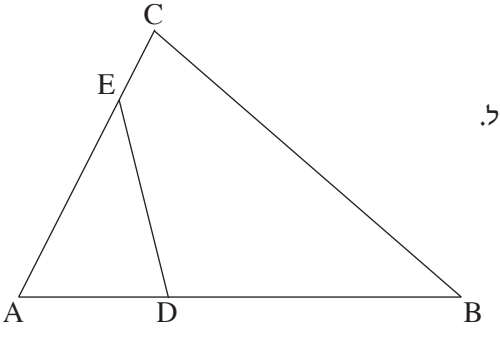
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. במרובע BDEC המשכי הצלעות BD ו־ CE נפגשים בנקודה A , כמתואר בציור.

נתון כי המרובע BDEC הוא בר־חסימה במעגל.



א. הוכח כי $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.

נתון: שטח המשולש ACB גדול פי 4 משטח המשולש ADE .

נקודה F נמצאת על הצלע ED כך ש־ $\sphericalangle EAF = \sphericalangle DAF$.

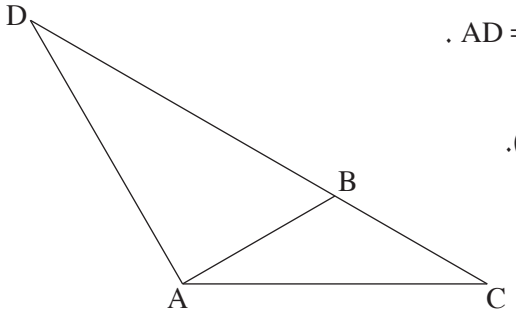
המשך AF חותך את BC בנקודה G .

ב. (1) הוכח כי $\triangle AEF \sim \triangle ABG$.

(2) מצא את היחס $\frac{EF}{BG}$.

ג. הוכח כי $\frac{GC}{BG} = \frac{AD}{AE}$.

המשך בעמוד 4



5. נתון משולש שווה־שוקיים ADC שבו $AD = AC$.

נקודה B נמצאת על הצלע DC

כך ש־ $AB = BC$ ו־ $DC = 3BC$ (ראה ציור).

א. מצא את גודל הזוויות במשולש ADC .

ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

BT הוא גובה לצלע AC במשולש ABC .

מצא את האורך של הקטע DT .

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + \frac{\cos x}{\sin x}$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. (1) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

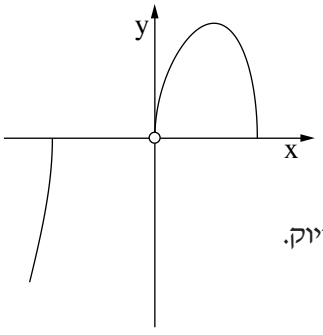
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$. השיפוע של משיק זה הוא המקסימלי מבין השיפועים של כל המשיקים לגרף הפונקציה בתחום הנתון.

מצא את הזווית שמשיק זה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה־ x .

המשך בעמוד 5

7. בציור שלפניך מוצגת סקיצה



של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{12x^3-x^5}}{x}$,

שתחום ההגדרה שלה הוא

$x\le -2\sqrt{3}\ ,\ 0<x\le 2\sqrt{3}$.

א. הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות בדיוק.

מצא את תחום הערכים של k .

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{12x-x^3}$,

שתחום ההגדרה שלה הוא $x\le -2\sqrt{3}\ ,\ 0\le x\le 2\sqrt{3}$.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) עבור הערכים של k שמצאת בסעיף א, מצא בכמה נקודות חותך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה $g(x)$.

8. נתון כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x , ומקיימת : $f'(x)=x^2-6x+5$.

א. הישר $y=10\frac{2}{3}$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.

מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x , ומקיימת: $f'(x)=g'(x)$.

ב. המרחק בין נקודת המקסימום של $f(x)$ לנקודת המקסימום של $g(x)$ הוא 1 .

מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

מצא את שתי האפשרויות.

ג. (1) סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצות של שני הגרפים האפשריים של $g(x)$.

(2) כמה נקודות פגישה עם ציר ה־ x יש לכל אחד משלושת הגרפים שסרטטת?

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד ג קיץ תשע"ד (2014)

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

3 שעות.

שאלה 2

א. הוכחה.
ב. $64 + (n-2) \cdot 2d^2$.
ג. $2 < n < 66$ או $3 \le n \le 65$.

שאלה 3

א. 25% .
ב. $\frac{27}{64}$.
ג. 0.16 .

שאלה 4

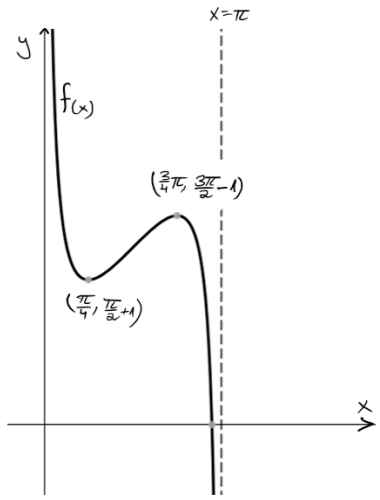
א. הוכחה .
ב. (1) הוכחה .
(2) $\frac{1}{2}$.
ג. הוכחה.

שאלה 5

א. $120°, 30°, 30°$.
ב. $\sqrt{112} = 4\sqrt{7}$ ס"מ.

שאלה 6

א. תחום הגדרה : $0 < x < \pi$.
ב. (1) $x = \pi$, $x = 0$.
(2) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + 1)$ מינימום, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} - 1)$ מקסימום.
(3)



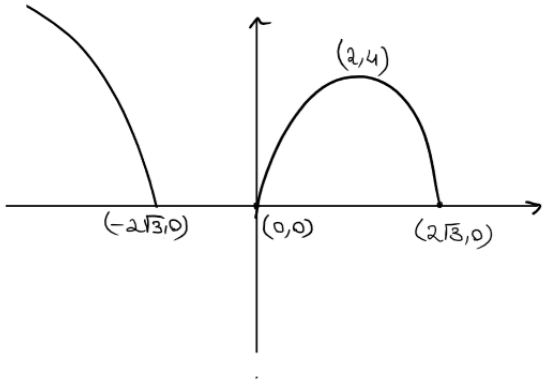
ג. $45°$.

<u>שאלה 7</u>

א. $0 \le k < 4$.

ב. (1) <u>עלייה</u>: $0 < x < 2$, <u>ירידה</u>: $2 < x < 2\sqrt{3}$ או $x < -2\sqrt{3}$.

(2)



(3) ב-3 נקודות.

<u>שאלה 8</u>

א. $(1,10\frac{2}{3})$מקסימום, $(5,0)$ מינימום.

ב. אפשרות א׳ : $(1,11\frac{2}{3})$ מקסימום , $(5,1)$ מינימום.

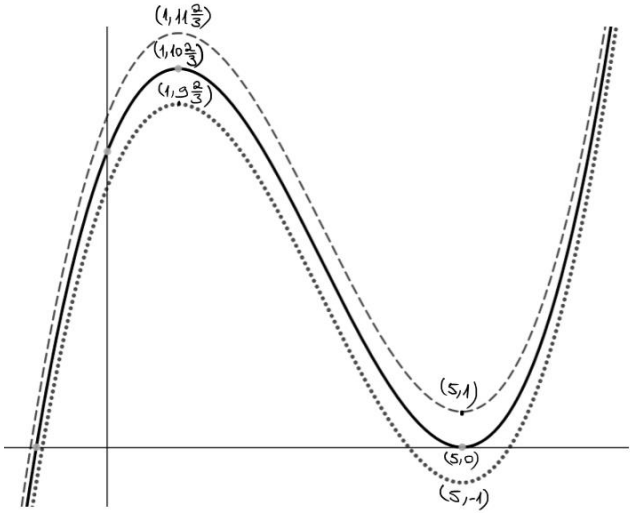
אפשרות ב׳ : $(1,9\frac{2}{3})$מקסימום , $(5,-1)$ מינימום.

ג. (1)

I הגרף העליון (המקווקו) :$g(x)$ אפשרות א׳

II הגרף האמצעי : $f(x)$

III הגרף התחתון (המנוקד) : $g(x)$ אפשרות ב׳



(2)

I הגרף העליון (המקווקו) :$g(x)$ אפשרות א׳ : **<u>נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-x.</u>**

II הגרף האמצעי : $f(x)$ **<u>2 נקודות משותפות עם ציר ה-x אחת חיתוך ואחת השקה.</u>**

III הגרף התחתון (המנוקד) : $g(x)$ אפשרות ב׳ **<u>שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה-x.</u>**

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	תשע"ד, **מועד ב**
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
			סה"כ		—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

הערה: קישורית לדוגמאות תשובה לשאלון זה תתפרסם בדף הראשי של אתר משרד החינוך.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.

המהירות של רץ I הייתה 6 קמ"ש, והמהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ"ש.

כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים,

יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ במהירות קבועה.

רץ III פגש בדרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פגש את רץ II.

מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II.

2. נתונה סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$

שלושה איברים עוקבים בסדרה, a_n , a_{n+1} , a_{n+2}, מקיימים:

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

א. מצא את האיבר a_n.

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה:

$$a_5 , a_9 , a_{13} , \ldots , a_{4k+1}$$

סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450.

האיבר הראשון בסדרה הנתונה בפתיח הוא $a_1 = -21$.

מצא את הערך של k.

המשך בעמוד 3

3. בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי:
מסלול א' או מסלול ב'.
נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.
10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.
40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).
מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת"
והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א' " הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

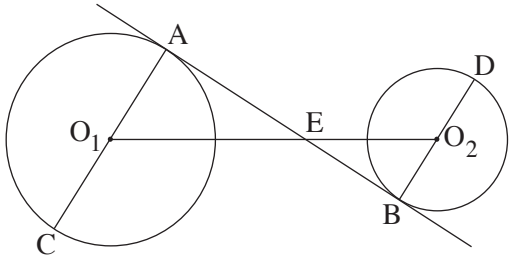
ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.
נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99 .
(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)
כמה בנות נבחרו?

המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 5-4 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

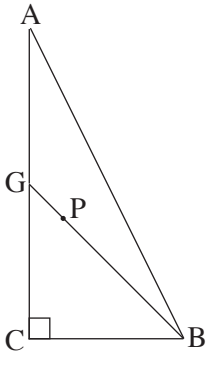


4. AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1 .
BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2 .
ישר משיק למעגלים O_1 ו־ O_2
בנקודות A ו־ B בהתאמה.
המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2
בנקודה E (ראה ציור).
נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס"מ
רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס"מ
אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס"מ

א. (1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק.

(2) הוכח כי $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$.

ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD .



5. במשולש ישר־זווית ACB ($\sphericalangle ACB = 90^o$)
נקודה G היא אמצע הניצב AC .
נקודה P נמצאת על GB כך ש־ $BG = 4 \cdot PG$ (ראה ציור).
רדיוס המעגל החוסם את המשולש CGB הוא R .
נתון: $GC = BC$.

א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל
החוסם את המשולש ACB .

ב. הבע באמצעות R את מרחק הנקודה P
ממרכז המעגל החוסם את המשולש ACB .

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

$$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$$

א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה.

מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ עם הצירים.

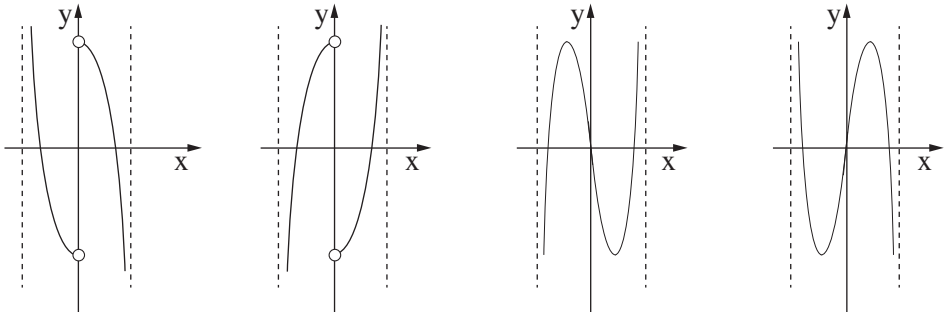
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות , וקבע את סוגן.

ג. על פי הסעיפים א ו־ ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. לפניך ארבעה גרפים, I-IV .

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.



I II III IV

המשך בעמוד 6

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

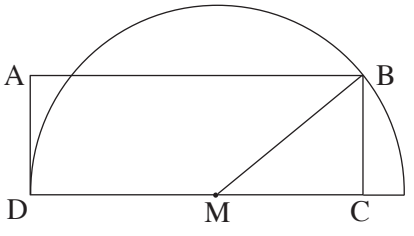
ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ שסרטטת, מצא את התחום שבו מתקיים:
פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית.
נמק.

8. נתון מלבן $ABCD$.

הצלע DC מונחת על הקוטר של חצי מעגל שהרדיוס שלו R ומרכזו M כך ש־ $DC \geq R$.

הצלע AD משיקה לחצי המעגל בנקודה D , והקדקוד B נמצא על המעגל (ראה ציור).



נסמן: $\sphericalangle BMC = x$

$S(x)$ — שטח המלבן $ABCD$

א. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח המלבן $S(x)$ יהיה מקסימלי.

ב. הבע באמצעות R את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $S(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ד, **מועד ב**
מספר השאלון: 035806, 316

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה				
		במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.

המהירות של רץ I הייתה 6 קמ"ש, והמהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ"ש.

כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים,

יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ במהירות קבועה.

רץ III פגש בדרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פגש את רץ II.

מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II.

תשובה לשאלה 1

נסמן: t — מספר השעות שעברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II

v — המהירות של רץ III

	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
רץ I עד הפגישה עם רץ III	6	$t+\frac{20}{60}-1$	$6(t+\frac{20}{60}-1)$
רץ II עד הפגישה עם רץ III	7.5	$t+\frac{20}{60}$	$7.5(t+\frac{20}{60})$
רץ III בין הפגישה עם רץ I לרץ II	v	1	$v\cdot 1$

הזמן של רץ III עד הפגישה עם רץ II מקיים: $t=\frac{7.5(t+\frac{20}{60})}{v}$ I.

הזמן של רץ III בין הפגישה עם רץ I לרץ II מקיים: $1=\frac{7.5(t+\frac{20}{60})-6(t+\frac{20}{60}-1)}{v}$

$$\Downarrow$$

$$v=1.5t+6.5$$

נציב $v=1.5t+6.5$ במשוואה I, ונקבל: $1.5t^2-t-2.5=0$

$$\Downarrow$$

$t>0$, לכן: $t=\frac{5}{3}$ שעות

/המשך בעמוד 3/

שאלה 2

נתונה סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$

שלושה איברים עוקבים בסדרה, a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , מקיימים:

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

א. מצא את האיבר a_n .

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה:

$$a_5 , a_9 , a_{13} , \ldots , a_{4k+1}$$

סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450 .

האיבר הראשון בסדרה הנתונה בפתיח הוא $a_1 = -21$.

מצא את הערך של k .

תשובה לשאלה 2

א. לפי הנתון: $a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$

$$\Downarrow$$

$$(a_{n+2} - a_n)\cdot(a_{n+2} + a_n) = 216$$

$$\Downarrow$$

נציב $a_{n+2} - a_n = 2d$ ו־ $a_{n+2} = a_n + 2d$, ונקבל: $2d(2a_n + 2d) = 216$

$$\Downarrow$$

I. $d(a_n + d) = 54$

לפי הנתון: $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$

$$\Downarrow$$

$$a_n + a_n + d + a_n + 2d = 54$$

$$\Downarrow$$

II. $a_n + d = 18$

מ־ I ו־ II מקבלים: $a_n = 15 , d = 3$

/המשך בעמוד 4/

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. הפרש הסדרה החדשה הוא: $a_9 - a_5 = a_1 + 8d - (a_1 + 4d) = 4d$

מצאנו כי $d = 3$, לכן הפרש הסדרה החדשה הוא: 12

k מציין את מספר האיברים N בסדרה החדשה, כי: $4k + 1 = 5 + 4(N - 1) \Rightarrow k = N$

לכן סכום k האיברים בסדרה החדשה מקיים: $450 = \frac{k}{2}(2 \cdot a_5 + 12(k - 1))$

האיבר החמישי בסדרה הנתונה הוא: $a_5 = -21 + 3(5 - 1) = -9$

מכאן: $450 = \frac{k}{2}(-2 \cdot 9 + 12(k - 1))$

$\Downarrow$

$k = 10$

/המשך בעמוד 5/

שאלה 3

בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי:

מסלול א' או מסלול ב'.

נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.

10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.

40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).

מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת"

והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א' " הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.

נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99 .

(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)

כמה בנות נבחרו?

תשובה לשאלה 3

א. נסמן: A — קבוצת הבנות

B — קבוצת הבוחרים במסלול א'

לפי הנתון: $P(A)=0.4$, $P(\overline{B}/A)=0.1$, $P(A/B)=0.75$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$P(A\cap \overline{B})=0.1\cdot 0.4=0.04 \qquad\qquad P(A\cap B)=0.75\,P(B)$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$$

$$\Downarrow$$

$$0.4=0.75P(B)+0.04$$

$$\Downarrow$$

$$P(B)=0.48$$

ב. מכפלת הסיכוי שיקרה המאורע "התלמיד הוא בת"

בסיכוי שיקרה המאורע "התלמיד בחר במסלול א' " היא: $P(A)\cdot P(B)=0.4\times 0.48$

הסיכוי שיקרה המאורע "התלמיד הוא בת וגם בחר במסלול א' " הוא: $P(A\cap B)=0.75\,P(B)=0.75\times 0.48$

מכאן: $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$

$$\Downarrow$$

המאורעות תלויים

/המשך בעמוד 6/

המשך תשובה לשאלה 3.

ג. ההסתברות שבת תבחר במסלול א' היא: $P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.75\times 0.48}{0.4}=0.9$

ההסתברות שמבין n בנות לפחות אחת בחרה במסלול א' היא: $P\left(\begin{matrix}\text{לפחות}\\ \text{אחת}\end{matrix}\right)=1-P_n(0)$

$\Downarrow$

נציב $P_n(0)=(1-0.9)^n$, ונקבל: $0.99=1-0.1^n$

$\Downarrow$

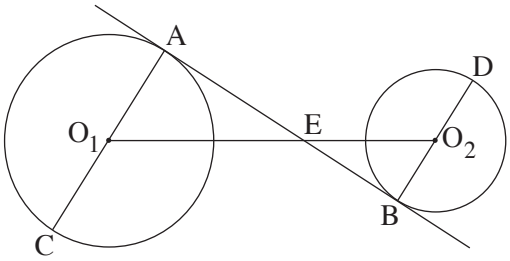
$0.1^n=0.01$

$\Downarrow$

$n=2$

/המשך בעמוד 7/

שאלה 4



AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1 .

BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2 .

ישר משיק למעגלים O_1 ו־ O_2

בנקודות A ו־ B בהתאמה.

המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2

בנקודה E (ראה ציור).

נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס"מ

רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס"מ

אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס"מ

א. (1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק.

(2) הוכח כי $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$.

ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD .

תשובה לשאלה 4

א. (1) $\sphericalangle O_1AE = \sphericalangle O_2BE = 90^o$ משיק למעגל מאונך לרדיוס

$\sphericalangle O_1EA = \sphericalangle O_2EB$ זוויות קדקודיות הן שוות

מכאן: $\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$ על פי ז.ז.

$$\Downarrow$$

$$\frac{O_1E}{O_1A} = \frac{O_2E}{O_2B} = \frac{O_1O_2 - O_1E}{O_2B}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{O_1E}{30} = \frac{90 - O_1E}{20}$$

$$\Downarrow$$

$$O_1E = 54$$

$$\frac{O_1E}{O_1C} = \frac{54}{30} = 1.8$$

/המשך בעמוד 8/

המשך תשובה לשאלה 4.

(2) $$\frac{O_2E}{O_2D}=\frac{O_1O_2-O_1E}{O_2D}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{O_2E}{O_2D}=\frac{90-54}{20}=1.8$$

מכאן: $$\frac{O_2E}{O_2D}=\frac{O_1E}{O_1C}$$

מצאנו $\sphericalangle O_1AE=\sphericalangle O_2BE$, לכן: $AC \parallel DB$ זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים

$$\Downarrow$$

$\sphericalangle CO_1E=\sphericalangle DO_2E$ זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו

מכאן: $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$ על פי צ.ז.צ

ב. מהדמיון מקבלים: $\sphericalangle O_1EC=\sphericalangle O_2ED=\beta$

מצאנו בתת־סעיף א(1): $\sphericalangle O_1EA=\sphericalangle O_2EB=\alpha$

נקודה E על הישר O_1O_2 , לכן: $\sphericalangle AED=180^o-(\beta+\alpha)$

$$\sphericalangle CED=\beta+\alpha+\sphericalangle AED$$

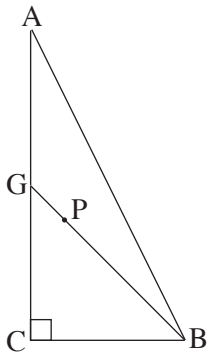
$$\sphericalangle CED=\beta+\alpha+180^o-(\beta+\alpha)=180^o$$

$$\Downarrow$$

הנקודה E על הישר CD

/המשך בעמוד 9/

שאלה 5



במשולש ישר־זווית ACB $(\sphericalangle ACB = 90^o)$

נקודה G היא אמצע הניצב AC .

נקודה P נמצאת על GB כך ש־ $BG = 4 \cdot PG$ (ראה ציור).

רדיוס המעגל החוסם את המשולש CGB הוא R .

נתון: $GC = BC$.

א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB .

ב. הבע באמצעות R את מרחק הנקודה P ממרכז המעגל החוסם את המשולש ACB .

תשובה לשאלה 5

א. $BG = 2R$ זווית היקפית של 90° נשענת על קוטר

מכאן במשולש BCG ישר־הזווית

לפי משפט פיתגורס מתקיים: $(2R)^2 = BC^2 + GC^2$

$\Downarrow$

לפי הנתון $GC = BC$, לכן: $GC = \sqrt{2}R$

$\Downarrow$

G אמצע CA , לכן: $CA = 2\sqrt{2}R$

במשולש ישר־הזווית ACB

לפי משפט פיתגורס מתקיים: $AB^2 = BC^2 + CA^2$

$\Downarrow$

$AB^2 = (\sqrt{2}R)^2 + (2\sqrt{2}R)^2$

$\Downarrow$

$AB = \sqrt{10}R$

AB הוא קוטר במעגל החוסם את $\triangle ACB$ זווית היקפית של 90° נשענת על קוטר

$\Downarrow$

רדיוס המעגל החוסם את $\triangle ACB$ $= \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}R$

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה לשאלה 5.

ב. במשולש ישר־הזווית ACB מתקיים: $\frac{CA}{CB} = tg(\sphericalangle ABC)$

$$\Downarrow$$

$$2 = tg(\sphericalangle ABC)$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ABC = 63.435^o$$

$$\Downarrow$$

$\sphericalangle CGB = \sphericalangle CBG = 45^o$, לכן: $\sphericalangle PBA = 63.435^o - 45^o = 18.435^o$

מהנתון $BG = 4PG$ נקבל: $BP = \frac{3}{4}BG = \frac{3}{4} \cdot 2R = \frac{3}{2}R$

נסמן ב־ O את מרכז המעגל החוסם את המשולש ACB ,

ונקבל כי לפי משפט הקוסינוסים במשולש POB מתקיים: $PO^2 = BO^2 + BP^2 - 2 \cdot BO \cdot BP \cdot \cos \sphericalangle PBA$

$$\Downarrow$$

$$PO^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}R\right)^2 + \left(\frac{3}{2}R\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}R \cdot \frac{3}{2}R \cdot \cos 18.435^o$$

$$\Downarrow$$

$PO > 0$, לכן: $PO = 0.5R$

/המשך בעמוד 11/

שאלה 6

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$

א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה.

מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ עם הצירים.

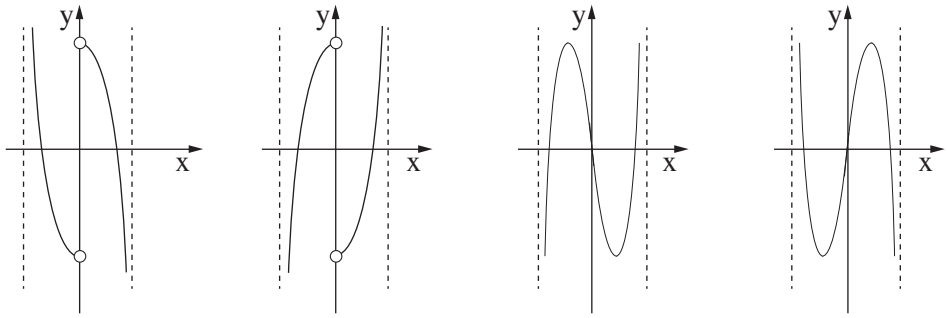
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות , וקבע את סוגן.

ג. על פי הסעיפים א ו־ ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. לפניך ארבעה גרפים, I-IV .

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.



I II III IV

תשובה לשאלה 6

א. (1) צריך להתקיים: $8 - x^2 \geq 0$

$\Downarrow$

תחום ההגדרה של $f(x)$ ושל $g(x)$: $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$

(2) $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;,\; x = \pm 2\sqrt{2}$

$g(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;,\; x = \pm 2\sqrt{2}$

נקודות חיתוך עם הצירים

של $f(x)$ ושל $g(x)$: $(0\,,0)\;,\;(2\sqrt{2}\,,0)\;,\;(-2\sqrt{2}\,,0)$

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה לשאלה 6.

ב.

$$f'(x) = \sqrt{8-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$g'(x) = \frac{16x-4x^3}{2\sqrt{8x^2-x^4}} = \frac{8x-2x^3}{\sqrt{8x^2-x^4}}$$

עבור $f(x)$ נקודות "חשודות" לקיצון: $8-2x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

עבור $g(x)$ נקודות "חשודות" לקיצון: $8x-2x^3=0 \Rightarrow x=\pm 2 \ , \ x=0$

x	$-2\sqrt{2}$		-2		0		2		$2\sqrt{2}$
f(x)	0	↘	-4	↗	0	↗	4	↘	0
g(x)	0	↗	4	↘	0	↗	4	↘	0

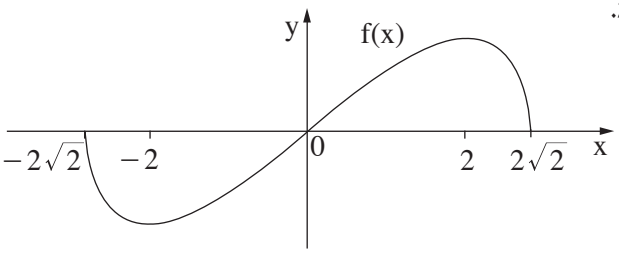
מקסימום מוחלט של $f(x)$: $(2\,,4)$

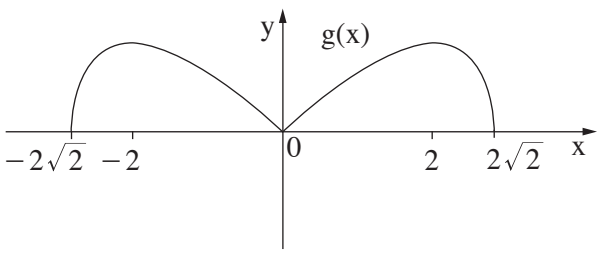
מינימום מוחלט של $f(x)$: $(-2\,,-4)$

מקסימום מוחלט של $g(x)$: $(2\,,4)$ $(-2\,,4)$

מינימום מוחלט של $g(x)$: $(-2\sqrt{2}\,,0)$ $(0\,,0)$ $(2\sqrt{2}\,,0)$

ג.





ד. $g'(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=0$

$\Downarrow$

גרף III וגרף IV אינם מתאימים

$g(x)$ עולה עבור $-2\sqrt{2}<x<-2 \ , \ 0<x<2$

$g(x)$ יורדת עבור $-2<x<0 \ , \ 2<x<2\sqrt{2}$

לכן: $g'(x)$ חיובית עבור $-2\sqrt{2}<x<-2 \ , \ 0<x<2$

$g'(x)$ שלילית עבור $-2<x<0 \ , \ 0<x<2\sqrt{2}$

מכאן: גרף I הוא הנכון

/המשך בעמוד 13/

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ שסרטטת, מצא את התחום שבו מתקיים:
פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית.
נמק.

תשובה לשאלה 7

א. (1) $f(x)$ מוגדרת עבור: $x^2-1\neq 0$

$\Downarrow$

תחום ההגדרה של $f(x)$: $x\neq\pm 1$

(2) אסימפטוטות של $f(x)$
המקבילות לצירים: $y=1 \quad , \quad x=\pm 1$

(3) נקודת חיתוך עם ציר ה־ y : $x=0 \Rightarrow f(0)=-4 \Rightarrow (0,-4)$

נקודת חיתוך עם ציר ה־ x : $f(x)=0 \Rightarrow (x-2)=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$

(4)
$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2-1)-(x-2)^2(2x)}{(x^2-1)^2}$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x)=\frac{2(x-2)(2x-1)}{(x^2-1)^2}$$

שיעורי ה־ x של הנקודות "החשודות" לקיצון: $f'(x)=0 \Rightarrow x=2 \quad , \quad x=\frac{1}{2}$

הנגזרת של המונה בפונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $2(4x-5)$

הסימן של הנגזרת השנייה $f''(x)$ נקבע על פי הסימן של נגזרת המונה של $f'(x)$ $\Downarrow$

כי המכנה של $f'(x)$ חיובי לכל x , לכן: הסימן של $f''(2)=2(4\cdot 2-5)>0$

הסימן של $f''(\frac{1}{2})=2(4\cdot\frac{1}{2}-5)<0$

$\Downarrow$

ל־ $f(x)$ מינימום ב־ $x=2$ ומקסימום ב־ $x=\frac{1}{2}$

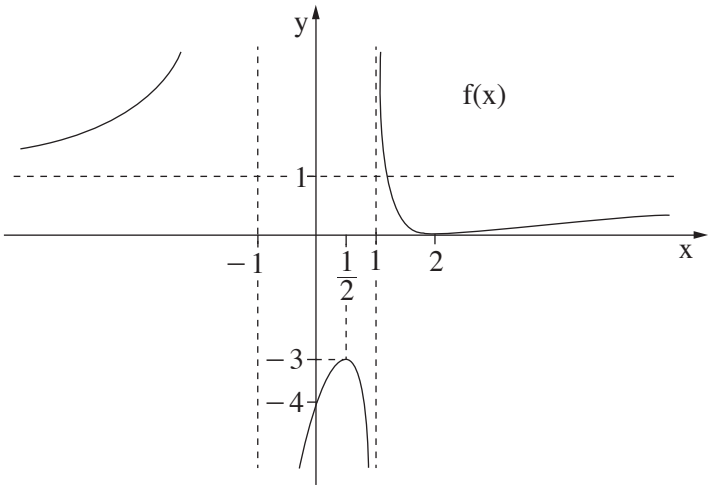
$\Downarrow$

נקודות הקיצון של $f(x)$ הן: מינימום ב־ $(2,0)$, מקסימום ב־ $\left(\frac{1}{2},-3\right)$

/המשך בעמוד 14/

המשך תשובה לשאלה 7.

ב.



ג. $f'(x) < 0$ עבור: $1 < x < 2$, $\frac{1}{2} < x < 1$ כי בתחום זה $f(x)$ יורדת

$\Downarrow$

בתחום $1 < x < 2$, $\frac{1}{2} < x < 2$

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור: $1 < x < 2$

$\Downarrow$

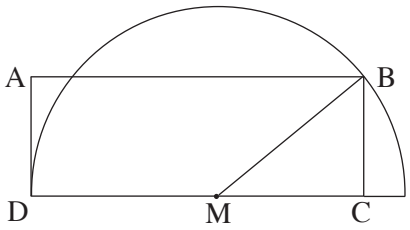
בתחום $1 < x < 2$, $\frac{1}{2} < x < 1$

$f''(x) > 0$ עבור: $1 < x < 2$

מכאן $f'(x) < 0$ ו־ $f''(x) > 0$ עבור: $1 < x < 2$

/המשך בעמוד 15/

שאלה 8



נתון מלבן ABCD .

הצלע DC מונחת על הקוטר של חצי מעגל שהרדיוס שלו R ומרכזו M כך ש־ $DC \geq R$.

הצלע AD משיקה לחצי המעגל בנקודה D ,

והקדקוד B נמצא על המעגל (ראה ציור).

נסמן: $\sphericalangle BMC = x$

$S(x)$ — שטח המלבן ABCD

א. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח המלבן $S(x)$ יהיה מקסימלי.

ב. הבע באמצעות R את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $S(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

תשובה לשאלה 8

א. במשולש ישר־הזווית MBC מתקיים: $MC = R\cos x$, $BC = R\sin x$

שטח המלבן ABCD הוא: $S(x) = BC \cdot (R + MC)$

$$\Downarrow$$

$$S(x) = R\sin x\,(R + R\cos x)$$

$$\Downarrow$$

נשתמש בזהות $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, ונקבל: $S(x) = R^2\sin x + \frac{R^2}{2}\sin(2x)$

$$\Downarrow$$

$$S'(x) = R^2\cos x + \frac{R^2}{2}\cdot 2\cos(2x) = R^2(\cos x + \cos(2x))$$

$$S'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x + \cos 2x = 0$$

$$\Downarrow$$

נשתמש בזהות $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, ונקבל: $\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$$\Downarrow$$

נשתמש בזהות $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ונקבל: $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\Downarrow$$

x זווית חדה במשולש, לכן $\cos x \neq -1$, ולכן: $\cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}$

/המשך בעמוד 16/

המשך תשובה לשאלה 8.

בדיקת מקסימום:

$$S''(x) = R^2(-2\sin(2x) - \sin x)$$

$$\Downarrow$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = R^2\left(-2\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = R^2\left(-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

$$\Downarrow$$

ל־ $S(x)$ מקסימום ב־ $x = \frac{\pi}{3}$

ב. הערכים של $S(x)$ אינם שליליים בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\text{השטח המבוקש} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2(\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x))\,dx = R^2[-\cos x - \frac{1}{4}\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{השטח המבוקש} = R^2\left(-\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cos(2\cdot\frac{\pi}{2}) + \cos 0 + \frac{1}{4}\cos 0\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{השטח המבוקש} = \frac{3}{2}R^2$$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ד, 2014
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	— 40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	1×20	— 20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	— 40 נקודות
			סה"כ		— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

הערה: קישורית לדוגמאות תשובה לשאלון זה תתפרסם בדף הראשי של אתר משרד החינוך.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. משאית יצאה מעיר A, וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B.
זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A,
והגיעה לעיר B 2 שעות לפני המשאית.
המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית.
המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות.
מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצא את שני הפתרונות).

2. בסדרה חשבונית יש 3n איברים.
סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.
א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.
ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.
סכום כל איברי הסדרה הוא 726.
מצא את הפרש הסדרה.

המשך בעמוד 3

3. אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.

המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.

נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1 ,

ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2 ,

ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7 .

הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים יותר מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת.

מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח. (בכל משחק שני סיבובים.)

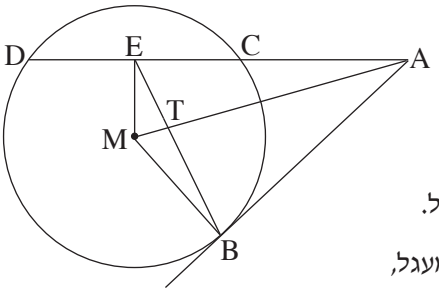
מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5 .

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

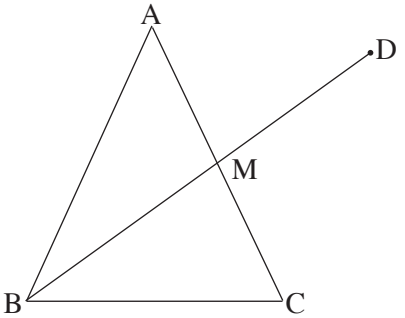


4. מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B ,
ויוצא ישר אחר החותך את המעגל בנקודות C ו־ D .
הנקודה E היא אמצע המיתר DC .
הנקודה M היא מרכז המעגל (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע AEMB הוא בר חסימה בְּמעגל.

ב. אלכסוני המרובע AEMB , שהוא בר חסימה בְּמעגל,
נפגשים בנקודה T .
נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים במשולש BDC .
הוכח כי $TB^2 = 2MT \cdot TA$.

ג. נתון: $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ס"מ , $MT =$ 1 ס"מ .
מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB .



5. במשולש שווה־שוקיים ABC ($AB = AC$),
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = 50^o$.

א. חשב את גודל הזווית הקהה AMB .

ממשיכים את BM עד הנקודה D .
נתון גם:
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ.
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

ב. חשב את זוויות המשולש AMD .

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = 2\sin^2 x$, $g(x) = \sin(2x)$, בתחום $0 \le x \le \pi$.

א. בתחום הנתון מצא:

(1) את שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר ה־ x .

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$.

הראה כי $h'(x) = f(x)$.

(2) בתחום $0 \le x \le \pi$ מצא את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax^2 + 9}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) הראה כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) הבע באמצעות a את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

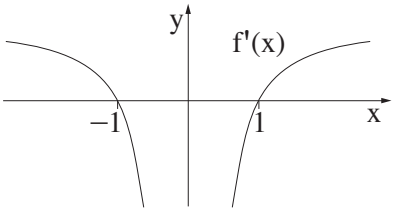
(4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = -4$, שווה ל־ 2 .

בלי לחשב את הערך של a , חשב את הערך המספרי של $f(-4)$ ואת הערך המספרי של $f(4)$.

המשך בעמוד 6

8. בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



האסימפטוטה <u>היחידה</u> של הפונקציה $f(x)$ היא $x = 0$.

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$

ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = -2$.

א. רק על פי נתוני השאלה,

סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$,

a ו־ b הם פרמטרים שונים מ־ 0 .

מצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ד, 2014
מספר השאלון: 035806, 316

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	2×20	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה				
		במישור	—	1×20	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	2×20	—	40 נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

משאית יצאה מעיר A , וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B .

זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A ,

והגיעה לעיר B 2 שעות לפני המשאית.

המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית.

המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות.

מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצא את שני הפתרונות).

תשובה לשאלה 1

נסמן: x — הזמן מרגע היציאה של המשאית עד רגע היציאה של המכונית

S — הדרך בין A ל־B

	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)	מהירות (קמ"ש)
משאית	6	S	$\frac{S}{6}$
מכונית	$6-x-2$	S	$\frac{S}{4-x}$
<u>עד הפגישה</u>			
משאית	$1+x$	$\frac{S}{6}\cdot(1+x)$	$\frac{S}{6}$
מכונית	1	$\frac{S}{4-x}\cdot 1$	$\frac{S}{4-x}$

הדרך שעברה המשאית עד הפגישה

שווה לדרך שעברה המכונית עד הפגישה, לכן:

$$\frac{S}{6}(1+x)=\frac{S}{4-x}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$\Downarrow$$

$x=$ שעה 1 , $x=$ שעות 2

/המשך בעמוד 3/

שאלה 2

בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.

סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.

סכום כל איברי הסדרה הוא 726.

מצא את הפרש הסדרה.

תשובה לשאלה 2

א. סכום n האיברים האחרונים הוא: $S_{n\ \text{אחרונים}} = \frac{n}{2}(2a_{2n+1} + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (5n-1)d)$

סכום n האיברים הקודמים הוא: $S_{n\ \text{קודמים}} = \frac{n}{2}(2a_{n+1} + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$

לפי הנתון:

$$S_{n\ \text{אחרונים}} = 2 \cdot S_{n\ \text{קודמים}}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{n}{2}(2a_1 + (5n-1)d) = 2 \cdot \frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$$
$$\Downarrow$$
$$2a_1 = -d(n-1)$$

סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

נציב $2a_1 = -d(n-1)$ ב־ S_n,

ונקבל: $S_n = \frac{n}{2}(-d(n-1) + d(n-1)) = 0$

ב. לפי הנתון:

$$a_5 + a_7 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\text{I.}\quad 2a_1 + 10d = 0$$

מצאנו בסעיף א: $\text{II.}\quad 2a_1 = -d(n-1)$

$d \neq 0$, לכן מ־ I ו־ II נקבל: $n = 11$

$$\Downarrow$$

מספר האיברים בסדרה הוא: $3n = 33$

נציב בסכום האיברים $3n = 33$

ו־ $2a_1 = -10d$ ונקבל: $726 = \frac{33}{2}[-10d + d(33-1)]$

$$\Downarrow$$
$$d = 2$$

/המשך בעמוד 4/

שאלה 3

אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.

המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.

נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1 ,

ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2 ,

ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7 .

הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים יותר מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת.

מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח. (בכל משחק שני סיבובים.)

מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

תשובה לשאלה 3

א. ההסתברות שאבא יצבור יותר מנקודה אחת היא:

$$P\left(\begin{matrix}\text{אבא}\\ \text{יותר מ־ 1}\end{matrix}\right)=P\left(\begin{matrix}\text{אבא}\\ \text{מנצח}\end{matrix}\ ,\ \text{תיקו}\right)+P\left(\text{תיקו}\ ,\ \begin{matrix}\text{אבא}\\ \text{מנצח}\end{matrix}\right)+P\left(\begin{matrix}\text{אבא}\\ \text{מנצח}\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}\text{אבא}\\ \text{מנצח}\end{matrix}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{אבא}\\ \text{יותר מ־ 1}\end{matrix}\right)=0.2\times0.7+0.7\times0.2+0.2\times0.2=0.32$$

ב. ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת היא:

$$P\left(\begin{matrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{matrix}\right)=1-P\left(\begin{matrix}\text{דני}\\ \text{מפסיד}\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}\text{דני}\\ \text{מפסיד}\end{matrix}\right)-P\left(\text{תיקו}\ ,\ \begin{matrix}\text{דני}\\ \text{מפסיד}\end{matrix}\right)-P\left(\begin{matrix}\text{דני}\\ \text{מפסיד}\end{matrix}\ ,\ \text{תיקו}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{matrix}\right)=1-0.2\times0.2-0.7\times0.2-0.2\times0.7=0.68$$

ג. ההסתברות, שבאחד הסיבובים יהיה תיקו ובאחר דני ינצח, אם ידוע שצבר לפחות נקודה אחת, היא הסתברות מותנית:

$$P\left(\begin{matrix}\text{אחד תיקו}\\ \text{ובאחר דני מנצח}\end{matrix}\ /\ \begin{matrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{matrix}\right)=\frac{P\left(\begin{matrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{matrix}\ \cap\ \begin{matrix}\text{אחד תיקו}\\ \text{ובאחר דני מנצח}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{matrix}\right)}$$

$$\Downarrow$$

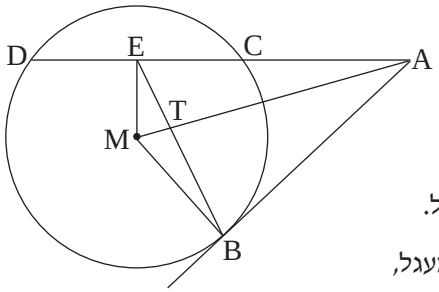
$$P\left(\begin{matrix}\text{אחד תיקו}\\ \text{ובאחר דני מנצח}\end{matrix}\ /\ \begin{matrix}\text{דני}\\ \text{לפחות 1}\end{matrix}\right)=\frac{0.7\times0.1+0.1\times0.7}{0.68}=\frac{7}{34}$$

ד. מצאנו כי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת במשחק היא 0.68 , לכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$P=P_4(2)=\frac{4!}{2!2!}0.68^2\times0.32^2=0.284$$

/המשך בעמוד 5/

שאלה 4



מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B ,

ויוצא ישר אחר החותך את המעגל בנקודות C ו־ D .

הנקודה E היא אמצע המיתר DC .

הנקודה M היא מרכז המעגל (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע AEMB הוא בר חסימה בְּמעגל.

ב. אלכסוני המרובע AEMB , שהוא בר חסימה בְּמעגל,

נפגשים בנקודה T .

נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים במשולש BDC .

הוכח כי $TB^2 = 2MT \cdot TA$.

ג. נתון: $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ס"מ , $MT = 1$ ס"מ .

מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB .

תשובה לשאלה 4

א.	$\sphericalangle MEA = 90^o$	קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר
	$\sphericalangle MBA = 90^o$	משיק למעגל מאונך לרדיוס
מכאן:	$\sphericalangle MEA + \sphericalangle MBA = 180^o$	
	$\Downarrow$	
	מרובע AEMB בר חסימה במעגל	סכום זוויות נגדיות שווה ל־ 180°

ב.	$TB = 2TE$	נקודת המפגש של התיכונים במשולש מחלקת את התיכון ביחס 2:1
	$TB \cdot TE = MT \cdot TA$	המיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר האחר
	נציב $TE = \frac{TB}{2}$ במכפלת המיתרים, ונקבל: $TB \cdot \frac{TB}{2} = MT \cdot TA$	
	$\Downarrow$	
	$TB^2 = 2MT \cdot TA$	

/המשך בעמוד 6/

המשך תשובה לשאלה 4.

ג. מצאנו בסעיף ב: $TB = 2TE$

$\Downarrow$

$TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$, לכן: $TB^2 = 10$

נציב נתונים במשוואה שהוכחנו בסעיף ב, ונקבל: $10 = 2 \cdot 1 \cdot TA$

$\Downarrow$

$TA = 5$

$AM = MT + TA = 1 + 5 = 6$

AM קוטר כי הזווית ההיקפית הנשענת על AM היא 90°

$\Downarrow$

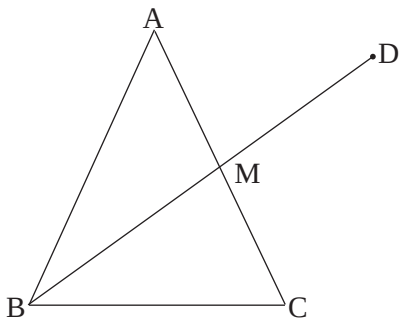
$\text{רדיוס} = \frac{AM}{2}$

$\Downarrow$

$\text{רדיוס} = 3$ ס"מ

/המשך בעמוד 7/

שאלה 5



במשולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$,

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = 50^o$.

א. חשב את גודל הזווית הקהה AMB .

ממשיכים את BM עד הנקודה D .

נתון גם:

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ.

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

ב. חשב את זוויות המשולש AMD .

תשובה לשאלה 5

א. נסמן: $AB = AC = b \quad , \quad \sphericalangle AMB = \alpha$

$\sphericalangle BAC = 50^o$, לכן: $\sphericalangle ABM = 180^o - 50^o - \alpha = 130^o - \alpha$

BM תיכון, לכן: $AM = \frac{1}{2}b$

לפי משפט הסינוסים במשולש ABM מתקיים: $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}b}{\sin(130^o - \alpha)}$

$$\Downarrow$$

$$\sin\alpha = 2(\sin 130^o \cos\alpha - \sin\alpha \cos 130^o)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin 130^o}{1 + 2\cos 130^o}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -5.36$$

$$\Downarrow$$

$90^o < \alpha < 180^o$, לכן: $\alpha = 100.56^o$

/המשך בעמוד 8/

המשך תשובה לשאלה 5.

ב. בסעיף א מצאנו: $\sphericalangle ABM = 130^o - \alpha$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ABM = 29.44^o$$

לפי משפט הסינוסים

במשולש ABD מתקיים: $\frac{b}{\sin \sphericalangle ADB} = 2 \times 14$ I.

לפי משפט הסינוסים

במשולש ABC מתקיים: $\frac{b}{\sin 65^o} = 2 \cdot 10$ II.

מ־ I ו־ II נקבל: $\sin \sphericalangle ADB = \frac{20 \sin 65^o}{28}$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ADB = 40.34^o$$

$$\sphericalangle AMD = 180^o - \alpha = 79.44^o$$

$\sphericalangle MAD = \alpha - \sphericalangle ADB = 60.22^o$ זווית חיצונית למשולש היא סכום זוויות המשולש שאינן צמודות לה

/המשך בעמוד 9/

שאלה 6

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = 2\sin^2 x$, $g(x) = \sin(2x)$, בתחום $0 \le x \le \pi$.

א. בתחום הנתון מצא:

(1) את שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר ה־ x .

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$.

הראה כי $h'(x) = f(x)$.

(2) בתחום $0 \le x \le \pi$ מצא את השטח הכלוא בין הגרפים

של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

תשובה לשאלה 6

א. (1) בנקודת החיתוך של שתי הפונקציות מתקיים:

$$2\sin^2 x = \sin(2x)$$
$$\Downarrow$$
$$2\sin^2 x = 2\sin x\cos x$$
$$\Downarrow$$
$$2\sin x\,(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad , \quad \sin x - \cos x = 0$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$\qquad\qquad \operatorname{tg} x = 1$$
$$\qquad\qquad \Downarrow$$

שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך בין הגרפים:

$$x = 0 \quad , \quad x = \pi \qquad x = \frac{\pi}{4}$$

(2)

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \pi k \;\Rightarrow\; x = 0 \;,\; x = \pi$$

$$g(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x = \pi k \;\Rightarrow\; x = 0 \;,\; x = \frac{\pi}{2} \;,\; x = \pi$$

נקודות החיתוך עם הצירים של $f(x)$: $(0\,,0)$, $(\pi\,,0)$

נקודות החיתוך עם הצירים של $g(x)$: $(0\,,0)$, $(\frac{\pi}{2}\,,0)$, $(\pi\,,0)$

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה לשאלה 6.

ב. (1)

$$h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2x$$

$$\Downarrow$$

$$h'(x) = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Downarrow$$

$$h'(x) = 2\sin^2 x$$

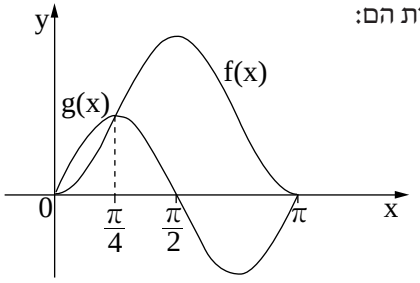
$$\Downarrow$$

$$h'(x) = f(x)$$

(2) $g(x)\,,\ f(x) \geq 0$ היא פונקציית סינוס,

ולפי נקודות החיתוך של הפונקציות,

נקבל כי הגרפים של הפונקציות הם:



לכן השטח המבוקש הוא:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (f(x) - g(x))\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - h'(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (h'(x) - g(x))\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$S = [-\frac{1}{2}\cos(2x) - h(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [h(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$S = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} - h\left(\frac{\pi}{4}\right) - (-\frac{1}{2}\cos 0 - h(0)) + h(\pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi) - \left(h\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$S = 2 + \frac{\pi}{2}$$

/המשך בעמוד 11/

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) הראה כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) הבע באמצעות a את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x=-4$, שווה ל־ 2 .

בלי לחשב את הערך של a , חשב את הערך המספרי של $f(-4)$ ואת הערך המספרי של $f(4)$.

תשובה לשאלה 7

א. (1)

$$a>0 \quad , \quad x^2\geqslant 0 \quad , \quad 9>0$$

$$\Downarrow$$

$ax^2+9>0$ לכל x

$$\Downarrow$$

$f(x)$ מוגדרת לכל x

(2)

$$f'(x)=\frac{2ax}{2\sqrt{ax^2+9}}=\frac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)=\frac{a\sqrt{ax^2+9}-\frac{ax\cdot 2ax}{2\sqrt{ax^2+9}}}{ax^2+9}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)=\frac{9a}{(ax^2+9)\sqrt{ax^2+9}}$$

$$\Downarrow$$

מאחר ש־ $a>0$ ו־ $ax^2+9>0$, נקבל: $f''(x)>0$ לכל x

$$\Downarrow$$

אין נקודות פיתול ל־ $f(x)$

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה לשאלה 7.

ב. (1) $ax^2+9>0$ לכל x

$\Downarrow$

$f'(x)$ מוגדרת לכל x

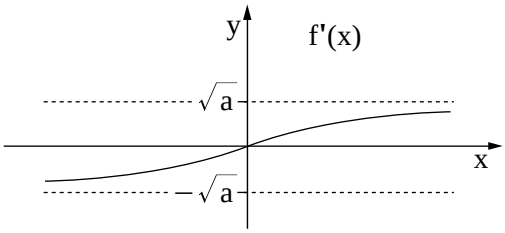
(2) אסימפטוטות של $f'(x)$: $y=-\sqrt{a}$, $y=\sqrt{a}$

(3) מצאנו בסעיף א(2): $f''(x)>0$ לכל x

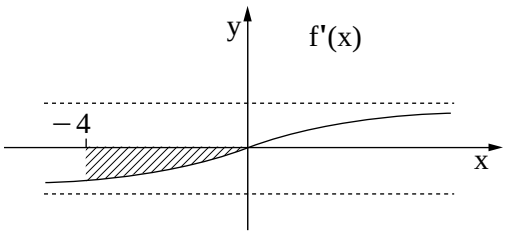
$\Downarrow$

$f'(x)$ עולה לכל x

(4) $f'(0)=0$, לכן:



ג. השטח ששווה ל־ 2 הוא מתחת לציר ה־ x כמתואר בציור:



$\Downarrow$

$$2=-\int_{-4}^{0} f'(x)\,dx=-\,[f(x)]_{-4}^{0}$$

$\Downarrow$

$$2=-\,f(0)+f(-4)$$

$\Downarrow$

$f(0)=3$, לכן: $2=-\,3+f(-4)$

$\Downarrow$

$$f(-4)=5$$

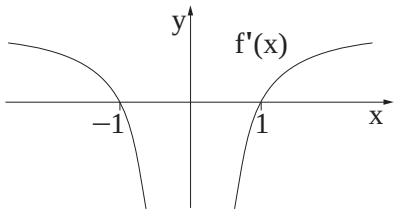
$\Downarrow$

מאחר ש־ $f(x)=f(-x)$, נקבל: $f(4)=5$

/המשך בעמוד 13/

שאלה 8

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



האסימפטוטה <u>היחידה</u> של הפונקציה $f(x)$ היא $x = 0$.

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$

ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = -2$.

א. רק על פי נתוני השאלה,

סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$,

a ו־ b הם פרמטרים שונים מ־ 0 .

מצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

תשובה לשאלה 8

א. על פי הגרף:

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	↗		↘	↘		↗

$\Downarrow$

ל־ $f(x)$ מקסימום ב־ $x = -1$ ומינימום ב־ $x = 1$

$x = 0$ היא האסימפטוטה היחידה של $f(x)$

ואין אסימפטוטות אופקיות, והישרים $y = \pm 2$

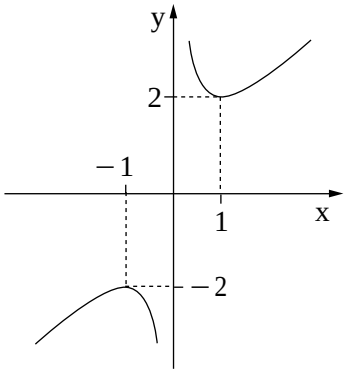
חותכים את $f(x)$ בנקודה אחת, לכן:

$\Downarrow$

$y = 2$ משיק ל־ $f(x)$ בנקודת המינימום

$y = -2$ משיק ל־ $f(x)$ בנקודת המקסימום

מכאן גרף הפונקציה הוא:



/המשך בעמוד 14/

המשך תשובה לשאלה 8.

ב. לפי הגרף: $f'(1) = 0$

נציב נקודה $(1\ ,\ 0)$ ב־ $f'(x)$ ונקבל: $f'(1) = \frac{a-b}{a} = 0$

$$\Downarrow$$

$$a = b$$

נציב $a = b$ ב־ $f'(x)$ ונקבל: $f'(x) = \frac{ax^2 - a}{ax^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = x + \frac{1}{x} + C$$

מצאנו בסעיף א כי שיעורי

נקודת המינימום הם $(1, 2)$.

נציב $(1, 2)$ ב־ $f(x)$ ונקבל: $2 = 1 + 1 + C$

$$\Downarrow$$

$$C = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	חורף תשע"ד, 2014
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

<u>הערה</u>: קישורית לדוגמאות תשובה לשאלון זה תתפרסם בדף הראשי של אתר משרד החינוך.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. נמל A ונמל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ־ A ל־ B .

רפסודה הפליגה בשעה 9:00 בבוקר מנמל A אל נמל B , והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר

כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם.

באותה שעה הפליגה סירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A .

מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ"ש.

הסירה הגיעה לנמל A , ומיד חזרה אל נמל B .

ידוע כי הרפסודה והסירה יגיעו לנמל B באותה שעה.

נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפלגתן.

האם הסירה והרפסודה יגיעו לנמל B עד לשעה 9:00 בערב באותו היום? נמק.

מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות.

הערה: בחישוביך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת: $a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ a_4 \ , \ \ldots$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6 .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1 \ , \ -a_2 \ , \ a_3 \ , \ -a_4 \ , \ \ldots$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3 .

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2} \ , \ \frac{1}{a_3} \ , \ \frac{1}{a_4} \ , \ \ldots$

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25 .

מצא את n .

3. בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים

בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם"

והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים

בחוג לתאטרון.

מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם.

עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי.

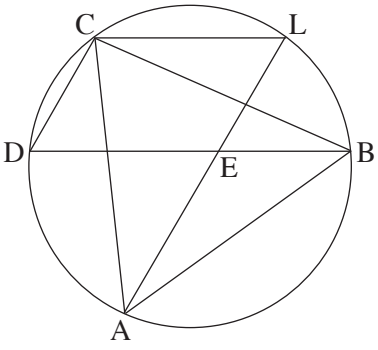
מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



4. משולש שווה־צלעות ABC חסום במעגל.

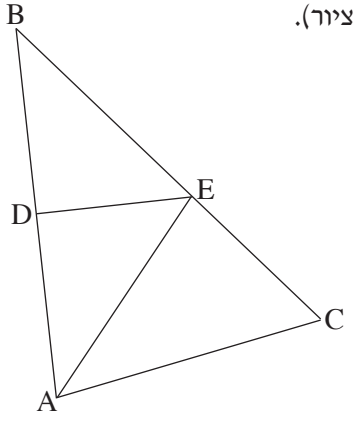
נקודות D ו־L נמצאות על המעגל כך ש־ $BD \parallel LC$.

המיתרים AL ו־BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע $LEDC$ הוא מקבילית.

ב. (1) הוכח כי $\triangle ADE$ הוא משולש שווה־צלעות.

(2) הוכח כי $LC + LB = LA$.



5. במשולש ABC האנך האמצעי לצלע BA חותך

את הצלעות BC ו־BA בנקודות E ו־D בהתאמה (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

א. (1) הבע באמצעות α ו־β את $\sphericalangle EAC$.

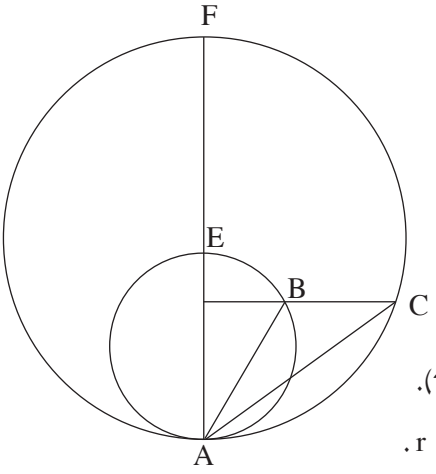
(2) הבע באמצעות α ו־β את היחס $\frac{CE}{EB}$.

נתון גם: AE חוצה־זווית BAC ,

$AC = 10$ ס"מ , $\beta = 40^o$.

ב. חשב את הרדיוס של המעגל החסום במשולש ABC .

/המשך בעמוד 5/



6. שני מעגלים, גדול וקטן, משיקים מבפנים בנקודה A .

נקודה F נמצאת על המעגל הגדול כך ש<u>קטע המרכזים</u>

של שני המעגלים נמצא על AF .

AF חותך את המעגל הקטן בנקודה E .

דרך נקודה B שעל המעגל הקטן העבירו ישר המקביל

למשיק המשותף לשני המעגלים.

המקביל חותך את המעגל הגדול בנקודה C (ראה ציור).

רדיוס המעגל הגדול הוא R , ורדיוס המעגל הקטן הוא r .

נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FAB = \beta$.

א. (1) הבע באמצעות α ו־β את $\sphericalangle BCA$. נמק.

(2) הבע רק באמצעות α ו־β את היחס $\frac{AC}{AB}$.

ב. הבע באמצעות α ו־β את היחס $\frac{R}{r}$.

/המשך בעמוד 6/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות

($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 - x + a}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 1 .

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבע את סוגן.

(הבע באמצעות a במידת הצורך.)

(3) ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות בדיוק.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. בתחום $x \le 0$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, על ידי הישר $x = -1$ ועל ידי ציר ה־ x , שווה ל־ $\frac{1}{2}$.

חשב את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x (מצא ערכים מספריים).

/המשך בעמוד 7/

8. במשולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$ אורך השוק הוא b.

BD הוא גובה לשוק AC. DE הוא אנך לבסיס BC.

סמן $\sphericalangle BAC = 2x$, ומצא מה צריך להיות הגודל של $\sphericalangle BAC$,

כדי שאורך האנך DE יהיה מקסימלי.

בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

9. בטבלה שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $1 < x < 2$.

x	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	1.19	1.28	1.36	1.43

הפונקציה $f(x)$ חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה.

נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית בקטע הנתון.

א. קבע מהו הסימן של $f'(1.2)$. נמק.

ב. קבע אם הטענה $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$ נכונה. נמק.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ בקטע $1 < x < 2$.

ג. בקטע הנתון מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ד. הראה כי בתחום $1.1 \le x \le 1.3$ אין פתרון למשוואה $g'(x) = f'(x)$.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: חורף תשע"ד, 2014
מספר השאלון: 035806, 316

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$	נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$	נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$	נקודות
				סה"כ	—	100	נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

נמל A ונמל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ־ A ל־ B .

רפסודה הפליגה בשעה 9:00 בבוקר מנמל A אל נמל B , והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר

כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם.

באותה שעה הפליגה סירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A .

מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ"ש.

הסירה הגיעה לנמל A , ומיד חזרה אל נמל B .

ידוע כי הרפסודה והסירה יגיעו לנמל B באותה שעה.

נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפלגתן.

האם הסירה והרפסודה יגיעו לנמל B עד לשעה 9:00 בערב באותו היום? נמק.

מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות.

<u>הערה</u>: בחישוביך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

תשובה לשאלה 1

	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
רפסודה	v	$\frac{S}{v}$	S
סירה נגד הזרם	$15-v$	$\frac{S}{15-v}$	S
סירה עם הזרם	$15+v$	$\frac{S}{15+v}$	S

הרפסודה והסירה יגיעו ל־ B באותו הזמן, לכן:

$$\frac{S}{v}=\frac{S}{15-v}+\frac{S}{15+v}$$

$$\Downarrow$$

$$v^2+30v-15^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$v\approx 6.21 \text{ קמ"ש}$$

הדרך שהרפסודה עוברת עד הפגישה: $5\cdot v$

הדרך שהסירה עוברת עד הפגישה: $5(15-v)$

לכן הדרך מ־ A ל־ B היא: $S=5v+5(15-v)=75$ ק"מ

הזמן שהרפסודה והסירה יגיעו ל־ B : $\frac{S}{v}=\frac{75}{6.21}=12.08$ שעות

$$\Downarrow$$

12 שעות > 12.08 שעות, לכן לא יספיקו להגיע עד 9:00 בערב

/המשך בעמוד 3/

שאלה 2

נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת: $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6 .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1 , -a_2 , a_3 , -a_4 , \ldots$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3 .

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_3} , \frac{1}{a_4} , \ldots$

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25 .

מצא את n .

תשובה לשאלה 2

א. נסמן ב־ q את מנת הסדרה הנתונה.

האיבר במקום $n+1$ בסדרה השלישית הוא: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n q}$

$$\Downarrow$$

לכן, מנת הסדרה השלישית היא: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$

$$\Downarrow$$

מנת הסדרה השלישית קבועה, לכן: הסדרה הנדסית

/המשך בעמוד 4/

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. סכום כל איברי הסדרה הנתונה, בלי האיבר הראשון, מקיים: $\frac{a_2}{1-q}=6$ I.

מנת הסדרה החדשה היא $-q$,

לכן סכום כל איברי הסדרה החדשה, בלי האיבר הראשון, מקיים: $\frac{-a_2}{1+q}=-3$ II.

מ־ I ו־ II מקבלים: $3(1+q)=6(1-q)$

$$\Downarrow$$

$$q=\frac{1}{3}$$

מהצבת $q=\frac{1}{3}$ ב־ I או ב־ II מקבלים: $a_2=4$

מצאנו כי מנת הסדרה השלישית היא: $\frac{1}{q}$

לכן, סכום n האיברים הראשונים

בסדרה השלישית מקיים: $\frac{\frac{1}{4}(3^n-1)}{3-1}=273.25$

$$\Downarrow$$

$$3^n=2187$$

$$\Downarrow$$

$$n=7$$

/המשך בעמוד 5/

שאלה 3

בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם"

והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון.

מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם.

עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי.

מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

תשובה לשאלה 3

נסמן: A — קבוצת המשתתפים בחוג לריקודי עם

B — קבוצת המשתתפים בחוג לתאטרון

א. לפי הנתון: $P(A/B)=0.6$

$$\Downarrow$$

המאורעות $P(A)$ ו־$P(B)$ הם בלתי תלויים, לכן: I. $P(A/B)=P(A)=0.6$

לפי הנתון: II. $P(A)=2P(B)$

מ־I ו־II מקבלים: $P(B)=0.3$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.6\times 0.3=0.18$$

$$\Downarrow$$

אחוז התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון הוא: 18%

/המשך בעמוד 6/

המשך תשובה לשאלה 3.

ב. המאורעות בלתי תלויים, לכן ההסתברות

לבחור מבין המשתתפים בחוג לריקודי עם

משתתף בחוג לתאטרון היא: $P = P(B / A) = P(B)$

$$\Downarrow$$

מהצבת התוצאה מסעיף א מקבלים: $P = 0.3$

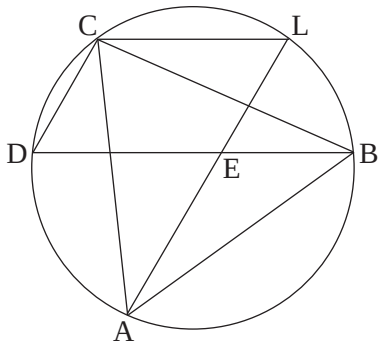
ההסתברות שלפחות 2 משתתפים בחוג לתאטרון: $P\left(\begin{array}{c}\text{לפחות } 2\\ \text{בחוג לתאטרון}\end{array}\right) = 1 - P_6(1) - P_6(0)$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{לפחות } 2\\ \text{בחוג לתאטרון}\end{array}\right) = 1 - \binom{6}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^5 - 0.7^6 = 0.5798$$

/המשך בעמוד 7/

שאלה 4



משולש שווה־צלעות ABC חסום במעגל.

נקודות D ו־ L נמצאות על המעגל כך ש־ $BD \parallel LC$.

המיתרים AL ו־ BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע $LEDC$ הוא מקבילית.

ב. (1) הוכח כי $\triangle ADE$ הוא משולש שווה־צלעות.

(2) הוכח כי $LC + LB = LA$.

תשובה לשאלה 4

א.	$\sphericalangle CAB = 60^o \quad , \quad \sphericalangle CBA = 60^o$	זוויות במשולש שווה־צלעות
	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB \quad , \quad \sphericalangle CBA = \sphericalangle CLA$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת
לכן:	$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CLA = 60^o$	
	$BD \parallel LC$	לפי הנתון
	$\Downarrow$	
	$\sphericalangle DEL = 180^o - \sphericalangle CLA = 120^o$	סכום זוויות חד־צדדיות הוא 180°
לכן:	$\sphericalangle CDB + \sphericalangle DEL = 180^o$	
	$\Downarrow$	
	$CD \parallel LE$	אם סכום זוויות חד־צדדיות הוא 180° אז הישרים מקבילים
	$\Downarrow$	
	$LEDC$ מקבילית	כי במרובע $LECD$ כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו

/המשך בעמוד 8/

המשך תשובה לשאלה 4.

ב. (1) $\sphericalangle ACB = 60^o$ זווית במשולש שווה־צלעות

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 60^o$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת

הוכחנו בסעיף א כי $CD \parallel LE$

ו־ $\sphericalangle CDB = 60^o$, לכן: $\sphericalangle DEA = \sphericalangle CDB = 60^o$ זוויות מתחלפות שוות זו לזו

ב־ $\triangle ADE$ שתי זוויות שוות ל־ 60° ,

לכן: $\triangle ADE$ שווה־צלעות

(2) $\sphericalangle LEB = \sphericalangle DEA = 60^o$ זוויות קדקודיות

$\sphericalangle ALB = \sphericalangle ACB = 60^o$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת

ב־ $\triangle LEB$ שתי זוויות שוות ל־ 60° ,

לכן: $\triangle LEB$ שווה־צלעות

I. $DE = AE$, II. $LE = LB$ צלעות במשולשים שווי־צלעות

III. $DE = LC$ צלעות נגדיות במקבילית

מ־ I ו־ III מקבלים: IV. $AE = LC$

$$LA = LE + AE$$
$$\Downarrow$$

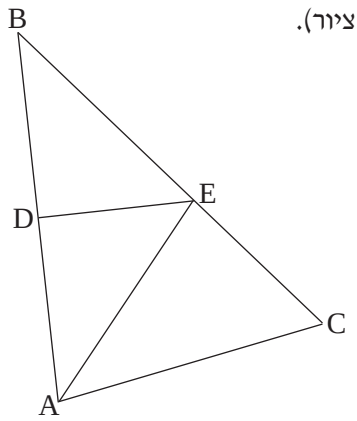
מ־ II ו־ IV מקבלים: $LA = LB + LC$

/המשך בעמוד 9/

שאלה 5

במשולש ABC האנך האמצעי לצלע BA חותך

את הצלעות BC ו־BA בנקודות E ו־D בהתאמה (ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

א. (1) הבע באמצעות α ו־β את $\sphericalangle EAC$.

(2) הבע באמצעות α ו־β את היחס $\frac{CE}{EB}$.

נתון גם: AE חוצה־זווית BAC ,

$AC =$ 10 ס"מ , $\beta = 40^o$.

ב. חשב את הרדיוס של המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC .

תשובה לשאלה 5

א. (1) במשולש BEA : DE גובה ותיכון לפי הנתון

$$\Downarrow$$

$EB = EA$ אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle EAB = \beta$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle EAC = \alpha - \beta$$

(2) על פי משפט הסינוסים

במשולש EAC מתקיים:

$$\frac{CE}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{EA}{\sin(180-(\alpha+\beta))}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\Downarrow$$

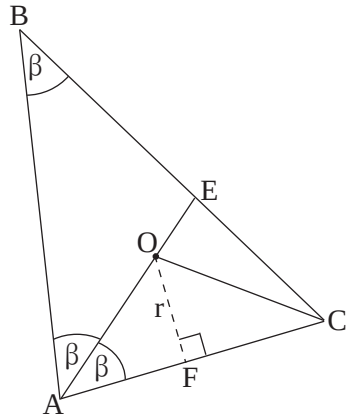
מצאנו כי $EA = EB$, לכן:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה לשאלה 5.

ב.



לפי הנתון: AE חוצה־זווית BAC

$\Downarrow$

מרכז המעגל החסום O נמצא על AE , $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAC = \beta$

$\Downarrow$

CO חוצה־זווית BCA מרכז מעגל חסום במשולש הוא מפגש חוצי־זוויות

$\Downarrow$

$$\sphericalangle OCA = \frac{180^o - (2\beta + \beta)}{2}$$

$\Downarrow$

לפי הנתון $\beta = 40^o$,

לכן: $$\sphericalangle OCA = \frac{180^o - (80^o + 40^o)}{2} = 30^o$$

לפי משפט הסינוסים

במשולש AOC : $$\frac{AO}{\sin 30^o} = \frac{10}{\sin(40^o + 30^o)}$$

$\Downarrow$

$$AO = 5.32$$

F נקודת ההשקה של

המעגל החסום לצלע AC , לכן: $\sphericalangle AFO = 90^o$ רדיוס מאונך למשיק

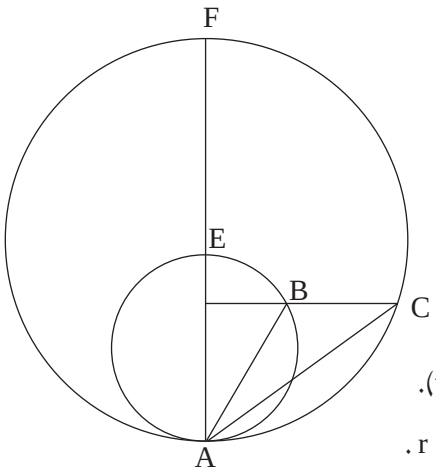
$\Downarrow$

במשולש ישר־הזווית AOF

מתקיים: $r = 5.32 \times \sin 40^o =$ 3.42 ס"מ

/המשך בעמוד 11/

שאלה 6



שני מעגלים, גדול וקטן, משיקים מבפנים בנקודה A.

נקודה F נמצאת על המעגל הגדול כך שקטע המרכזים של שני המעגלים נמצא על AF.

AF חותך את המעגל הקטן בנקודה E.

דרך נקודה B שעל המעגל הקטן העבירו ישר המקביל למשיק המשותף לשני המעגלים.

המקביל חותך את המעגל הגדול בנקודה C (ראה ציור).

רדיוס המעגל הגדול הוא R, ורדיוס המעגל הקטן הוא r.

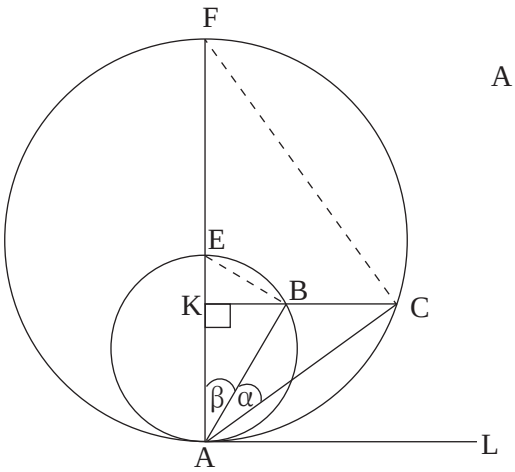
נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FAB = \beta$.

א. (1) הבע באמצעות α ו־β את $\sphericalangle BCA$. נמק.

(2) הבע רק באמצעות α ו־β את היחס $\frac{AC}{AB}$.

ב. הבע באמצעות α ו־β את היחס $\frac{R}{r}$.

תשובה לשאלה 6



א. (1) נתון: $CK \parallel AL$

$\sphericalangle FAL = 90^o$ כי הקוטר FA מאונך למשיק בנקודה A

מכאן: $\sphericalangle CKA = 90^o$ זויות חד־צדדיות משלימות ל־ 180°

$\Downarrow$

במשולש KCA מתקיים: $\sphericalangle KCA = 90^o - (\beta + \alpha)$

(2) לפי משפט הסינוסים במשולש ABC מתקיים:

$$\frac{AB}{\sin[90^o - (\beta + \alpha)]} = \frac{AC}{\sin(90^o + \beta)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)}$$

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה לשאלה 6.

ב. $\sphericalangle FCA = 90^o \quad , \quad \sphericalangle EBA = 90^o$ זוויות היקפיות הנשענות על קוטר

לכן במשולש EBA מתקיים: $AB = 2r\cos\beta$

ובמשולש FCA מתקיים: $AC = 2R\cos(\alpha+\beta)$

מכאן: $\frac{AC}{AB} = \frac{R\cos(\alpha+\beta)}{r\cos\beta}$

בסעיף א מצאנו: $\frac{AC}{AB} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$\Downarrow$$

מכאן: $\frac{R\cos(\alpha+\beta)}{r\cos\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha+\beta)}$$

/המשך בעמוד 13/

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 - x + a}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 1 .

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבע את סוגן.

(הבע באמצעות a במידת הצורך.)

(3) ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות בדיוק.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. בתחום $x \le 0$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, על ידי הישר $x = -1$

ועל ידי ציר ה־ x , שווה ל־ $\frac{1}{2}$.

חשב את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x (מצא ערכים מספריים).

תשובה לשאלה 7

א. (1) אין אסימפטוטות מקבילות לציר ה־ y , כי הפונקציה רציפה לכל x .

אסימפטוטה מקבילה לציר ה־ x : $y = 1$

(2)

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2 - x + a) - (x^2 + x - a)(2x - 1)}{(x^2 - x + a)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 4ax}{(x^2 - x + a)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad , \quad x = 2a$$

נגזרת המונה של $f'(x)$ בנקודה שבה $x = 0$ היא: $4a > 0$ $(a > 0)$

נגזרת המונה של $f'(x)$ בנקודה שבה $x = 2a$ היא: $-4a < 0$ $(a > 0)$

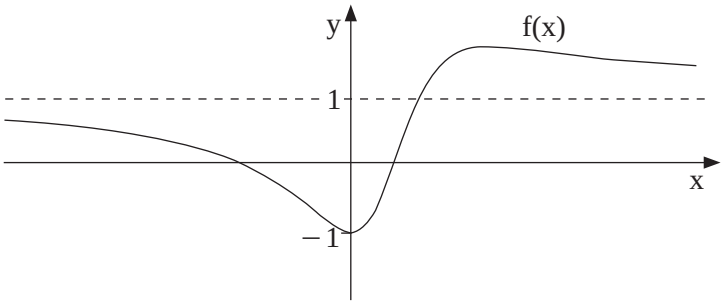
מכאן, המינימום של $f(x)$ הוא בנקודה: $(0 , -1)$

המקסימום של $f(x)$ הוא בנקודה: $(2a , \frac{4a+1}{4a-1})$

/המשך בעמוד 14/

המשך תשובה לשאלה 7.

א. (3)



ב. $f(x)$ יורדת בתחום $-1 < x \le 0$, לכן בתחום זה: $f'(x) < 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = -\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = -\left[f(x)\right]_{-1}^{0} = -f(0) + f(-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{-a}{a} + \frac{1-1-a}{1+1+a}$$

$$\Downarrow$$

$$a = 2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x + 2}$$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה־ x: $(1\,,0)$, $(-2\,,0)$

/המשך בעמוד 15/

שאלה 8

במשולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$ אורך השוק הוא b.

BD הוא גובה לשוק AC. DE הוא אנך לבסיס BC.

סמן $\sphericalangle BAC = 2x$, ומצא מה צריך להיות הגודל של $\sphericalangle BAC$,

כדי שאורך האנך DE יהיה מקסימלי.

בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

תשובה לשאלה 8

על פי הנתונים מוצאים: $\sphericalangle DBC = x$

במשולש ישר־הזווית DBE מתקיים: $\frac{DE}{BD} = \sin x$

במשולש ישר־הזווית ABD מתקיים: $\frac{BD}{b} = \sin(2x)$

מכאן אורך הקטע DE הוא: $L(x) = b\sin(2x)\cdot\sin x$

$$\Downarrow$$

$$L'(x) = b\cdot 2\cos(2x)\cdot\sin x + b\sin(2x)\cos x$$

$$\Downarrow$$

$$L'(x) = 2b\sin x\,(\cos(2x) + \cos^2 x) = 2b\sin x\,(3\cos^2 x - 1)$$

מאחר ש־ $\sin x \neq 0$ כי x זווית במשולש, נקבל: $L'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad 3\cos^2 x - 1 = 0$

$$\Downarrow$$

$\cos x \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$, כי x זווית

במשולש ישר־זווית DBE, לכן: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Downarrow$$

$$x = 54.73^o \quad\Rightarrow\quad \sphericalangle BAC = 109.46^o$$

בדיקת מקסימום:

x	50°	54.73^o	58°
$L(x)$	$0.75b$	$0.77b$	$0.76b$
	$\nearrow$		$\searrow$

/המשך בעמוד 16/

שאלה 9

בטבלה שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $1 < x < 2$.

x	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	1.19	1.28	1.36	1.43

הפונקציה $f(x)$ חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה.

נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית בקטע הנתון.

א. קבע מהו הסימן של $f'(1.2)$. נמק.

ב. קבע אם הטענה $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$ נכונה. נמק.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ בקטע $1 < x < 2$.

ג. בקטע הנתון מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ד. הראה כי בתחום $1.1 \le x \le 1.3$ אין פתרון למשוואה $g'(x) = f'(x)$.

תשובה לשאלה 9

א. על פי הנתונים, אין נקודות קיצון פנימיות

ו־ $f(1.3) > f(1.2)$, לכן:

$f(x)$ עולה בקטע

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$ בקטע

$\Downarrow$

$f'(1.2) > 0$

ב. לפי הנתון:

$f''(x) < 0$ בקטע

$\Downarrow$

$f'(x)$ יורדת בקטע

$\Downarrow$

$f'(x)$ קטנה כאשר x גדל, לכן מתקיים: $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$

$\Downarrow$

הטענה נכונה

/המשך בעמוד 17/

המשך תשובה לשאלה 9.

ג.

$$g(x)=\sqrt{f(x)}$$
$$\Downarrow$$
$$g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

מצאנו: $f'(x)>0$ בקטע

$$\Downarrow$$

מאחר ש- $\sqrt{f(x)}>0$: $g'(x)>0$ בקטע

$$\Downarrow$$

$g(x)$ עולה בקטע

ד. אם $g'(x)=f'(x)$ אז: $f'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$$\Downarrow$$

$f'(x)\neq 0$, לכן: $f(x)=\frac{1}{4}$

$$\Downarrow$$

לפי הטבלה $1.19\le f(x)\le 1.36$

בתחום $1.1\le x\le 1.3$, לכן: אין פתרון למשוואה

<u>דרך אחרת</u>

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

לפי הטבלה $\sqrt{f(x)}>1$,

ומצאנו $f'(x)>0$,

לכן המנה $g'(x)$

קטנה מהמונה $f'(x)$: $g'(x)<f'(x)$ לכל x בקטע

$$\Downarrow$$

אין פתרון למשוואה

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	תשע"ג, **מועד ב**
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה"כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

הערה: קישורית לדוגמאות תשובה לשאלון זה תתפרסם בדף הראשי של אתר משרד החינוך.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. ראובן ושמעון חופרים יחד תעלה אחת ב־ 12 שעות.
אם ראובן חופר לבד $\frac{1}{3}$ מהתעלה, ולאחר שהוא מסיים את חלקו שמעון חופר לבד את יתר התעלה, החפירה מסתיימת כעבור $23\frac{1}{3}$ שעות.
כמה תעלות שלמות לכל היותר יחפור ראובן לבד בפחות מ־ 100 שעות? התעלות זהות לתעלה הנתונה.
הספקי העבודה של שמעון ושל ראובן אינם משתנים.

2. נתונה סדרה a_n: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots$
ונתונה סדרת הסכומים S_n: $S_1 , S_2 , S_3 , \dots , S_n , \dots$
S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n.
סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3 \quad , \quad S_1 = 3 \quad , \quad b \neq 0$
   א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b.
   ב. נתון כי $|b| < 1$.
בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו־ II:
I. $a_3 , a_7 , a_{11} , a_{15} , \dots$
II. $a_1 , -a_3 , a_5 , -a_7 , \dots$
T הוא הסכום של אין־סוף איברי הסדרה I,
M הוא הסכום של אין־סוף איברי הסדרה II.
הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

המשך בעמוד 3

3. מבין כל תלמידי י"ב בעיר מסוימת מאתרים תלמידים שיתאימו לקורס ייחודי.

הקורס מתאים לתלמידים שיש להם יכולת טכנית.

הבוחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית,

ומאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית.

מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית

גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו.

א. מהי ההסתברות שלתלמיד י"ב בעיר זו אכן יש יכולת טכנית?

ב. באותה עיר כל אלה שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, ורק הם.

בעיר יש 600 תלמידי י"ב.

מבין המשתתפים בקורס לכמה תלמידים אין יכולת טכנית?

המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (33$\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה — 16$\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

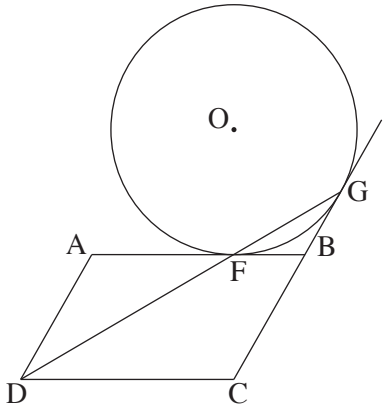
4. נתונה מקבילית ABCD .

הצלע AB משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה F .

המשך הצלע CB משיק למעגל בנקודה G

(ראה ציור).

נתון: $AF = AD$.



א. הוכח כי הנקודה F נמצאת על הישר DG .

ב. נתון גם: $BO = BC$, $FC \perp DC$.

(1) הוכח כי $OF = FC$.

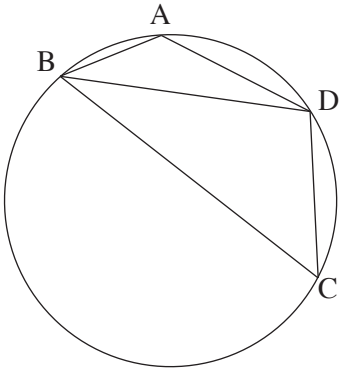
(2) הוכח כי $FB = \frac{1}{2}BO$.

5. מרובע ABCD חסום במעגל.

המיתר BD חוצה את הזווית ABC (ראה ציור).

נתון: $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$,

$\sphericalangle ADC = 120^{o}$.



א. (1) מצא את גודל הזווית ABD .

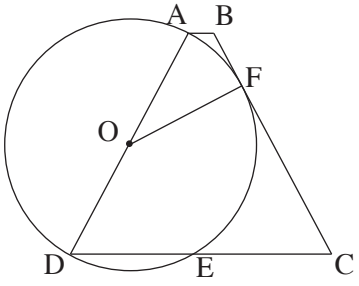
(2) מצא את אורך המיתר BD .

ב. נקודה K נמצאת על המיתר BD

כך ש־ $\Delta ABK \sim \Delta DBA$ בהתאמה.

מצא את שטח המשולש ABK .

המשך בעמוד 5



6. נתון טרפז שווה־שוקיים $ABCD$ $(AD = BC)$.

השוק AD היא קוטר במעגל שמרכזו O.

השוק BC משיקה למעגל בנקודה F.

המעגל חותך את הבסיס DC בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BCD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α את גודל הזווית FOD.

ב. (1) הבע באמצעות α את גודל הזווית ODF.

(2) הבע באמצעות α את היחס $\frac{DE}{DC}$.

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \cos\frac{x}{2}$ בתחום $2\pi \le x \le 5\pi$.

א. (1) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.

(2) הראה כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום הנתון.

(3) רק על פי התשובות לתת־סעיפים (1) ו־(2), סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

(4) כמה פתרונות יש למשוואה $f'(x) = 40$ בתחום הנתון? נמק.

ב. (1) רשום את הערך המקסימלי של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון.

(2) האם השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון, שווה לערך של האינטגרל המסוים $\int_{2\pi}^{5\pi} (f'(x) - f''(x))\,dx$? נמק.

המשך בעמוד 6

8. נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x, ונתונה הפונקציה $g(x)$.

נתון: $g(x) = k + 2x$, $\int_0^1 g(x)\,dx = 0$. k הוא פרמטר.

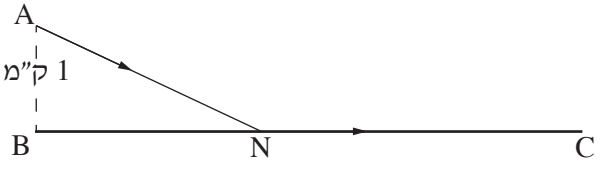
א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. נתון גם כי בתחום $x \geq 0$ מתקיים: $f(x) \geq g(x)$, $f''(x) > 0$, $f(0) = k$.
סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $x \geq 0$. נמק.

ג. בתחום $x \geq 0$ איזה שטח גדול יותר: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ והצירים או השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = 1$?
נמק.

ד. נתון גם: $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + f(0)$, a הוא פרמטר,
הגרף של $g(x)$ משיק לגרף של $f(x)$ בנקודה הנמצאת בתחום $x \geq 0$.
מצא את הפונקציה $f(x)$.

9. דני יצא מנקודה A, הנמצאת בשדה במרחק 1 ק"מ מהכביש BC .
הוא הלך בשדה בקו אלכסוני במהירות קבועה v ,
והגיע לכביש BC בנקודה כלשהי N (ראה ציור).
דני הלך בכביש במהירות הגדולה פי $\frac{13}{12}$ מהמהירות שבה הלך בשדה, והגיע לנקודה C בכביש.
המרחק בין B ל־ C הוא 6 ק"מ.
מהו אורך המסלול ANC אם ידוע שדני עבר אותו בזמן המינימלי?



בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ג, **מועד ב**
מספר השאלון: 035806, 316

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה				
		במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

ראובן ושמעון חופרים יחד תעלה אחת ב־ 12 שעות.

אם ראובן חופר לבד $\frac{1}{3}$ מהתעלה, ולאחר שהוא מסיים את חלקו שמעון חופר לבד את יתר התעלה, החפירה מסתיימת כעבור $23\frac{1}{3}$ שעות.

כמה תעלות שלמות לכל היותר יחפור ראובן לבד בפחות מ־ 100 שעות? התעלות זהות לתעלה הנתונה.

הספקי העבודה של שמעון ושל ראובן אינם משתנים.

תשובה לשאלה 1

א.

	זמן העבודה (שעות)	קצב העבודה ($\frac{1}{\text{שעה}}$)	סה"כ עבודה
ראובן	$\frac{x}{3}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{3}$
שמעון	$\frac{2y}{3}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{2}{3}$

$$\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1 \quad \Rightarrow \quad \text{I.}\ \ 12y+12x=xy$$

$$\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=23\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{II.}\ \ x=70-2y$$

מ־ I ו־ II מקבלים: $y^2-41y+420=0$

$\Downarrow$

הזמן ששמעון חופר לבד תעלה אחת: $y=$ 20 שעות או $y=$ 21 שעות

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

הזמן שראובן חופר לבד תעלה אחת: $x=$ 30 שעות או $x=$ 28 שעות

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

בפחות מ־ 100 שעות מספר התעלות שראובן יחפור קטן מ: $\frac{100}{30}=3.33$ או $\frac{100}{28}=3.57$

$\Downarrow$

מספר התעלות השלמות שראובן יחפור לכל היותר בפחות מ־ 100 שעות: 3 תעלות

/המשך בעמוד 3/

שאלה 2

נתונה סדרה a_n: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots$

ונתונה סדרת הסכומים S_n: $S_1 , S_2 , S_3 , \dots , S_n , \dots$

S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3 \quad , \quad S_1 = 3 \quad , \quad b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו־ II :

I. $a_3 , a_7 , a_{11} , a_{15} , \dots$

II. $a_1 , -a_3 , a_5 , -a_7 , \dots$

T הוא הסכום של אין־סוף איברי הסדרה I ,

M הוא הסכום של אין־סוף איברי הסדרה II .

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

תשובה לשאלה 2

א. עבור $n > 1$:

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = b \cdot S_n + 3 - (b \cdot S_{n-1} + 3)$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = b(S_n - S_{n-1}) = b \cdot a_n$$

$$\Downarrow$$

המנה עבור $n > 1$ היא: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b$

נבדוק אם גם עבור $n = 1$ המנה היא b: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{S_2 - S_1}{S_1} = \frac{bS_1 + 3 - S_1}{S_1} = \frac{b \cdot 3 + 3 - 3}{3} = b$

המנה היא מספר קבוע b , לכן הסדרה a_n היא הנדסית.

/המשך בעמוד 4/

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. מנת הסדרה I היא: $\frac{a_7}{a_3}=\frac{a_1\cdot b^6}{a_1\cdot b^2}=b^4$

מנת הסדרה II היא: $\frac{-a_3}{a_1}=\frac{-a_1b^2}{a_1}=-b^2$

$0<b^4<1$, לכן

הסכום של הסדרה I הוא: $T=\frac{a_3}{1-b^4}=\frac{a_1\cdot b^2}{1-b^4}$

$-1<-b^2<0$, לכן

הסכום של הסדרה II הוא: $M=\frac{a_1}{1+b^2}$

מכאן: $\frac{M}{T}=\frac{a_1}{1+b^2}\cdot\frac{1-b^4}{a_1\cdot b^2}$

$$\Downarrow$$

לאחר צמצום ב־ a_1 וב־ $1+b^2$ מקבלים: $\frac{M}{T}=\frac{1-b^2}{b^2}$

/המשך בעמוד 5/

שאלה 3

מבין כל תלמידי י"ב בעיר מסוימת מאתרים תלמידים שיתאימו לקורס ייחודי.

הקורס מתאים לתלמידים שיש להם יכולת טכנית.

הבוחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית,

ומאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית.

מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית

גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו.

א. מהי ההסתברות שלתלמיד י"ב בעיר זו אכן יש יכולת טכנית?

ב. באותה עיר כל אלה שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, ורק הם.

בעיר יש 600 תלמידי י"ב.

מבין המשתתפים בקורס לכמה תלמידים אין יכולת טכנית?

תשובה לשאלה 3

א. נסמן: A — קבוצת התלמידים בעלי יכולת טכנית

B — קבוצת התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית

לפי הנתון: $P(B/A) = 0.8$, $P(B/\overline{A}) = 0.1$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

I. $P(B \cap A) = 0.8P(A)$, II. $P(B \cap \overline{A}) = 0.1 \cdot P(\overline{A}) = 0.1(1 - P(A))$

לפי הנתון: $P(A/B) = 4P(\overline{A}/B)$

$$\Downarrow$$

III. $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{4P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$

מ־ I , II ו־ III מקבלים: $0.8P(A) = 4 \cdot 0.1(1 - P(A))$

$$\Downarrow$$

$P(A) = \frac{1}{3}$

/המשך בעמוד 6/

המשך תשובה לשאלה 3.

ב.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0.8P(A) + 0.1(1 - P(A))$$

$$\Downarrow$$

$$P(B) = \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

לכן מבין המשתתפים בקורס

ההסתברות שלתלמיד אין יכולת

טכנית היא:

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

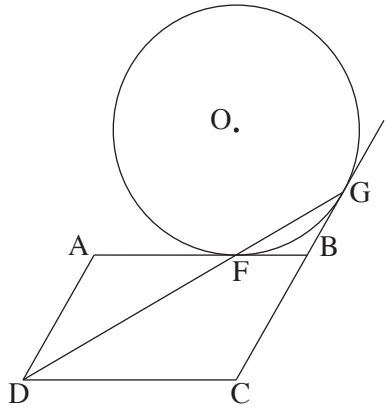
מספר התלמידים בקורס הוא: $600 \times P(B)$

מספר התלמידים בקורס

שאין להם יכולת טכנית הוא: $600 \cdot P(B) \cdot P(\overline{A}/B) = 600 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = 40$

/המשך בעמוד 7/

שאלה 4



נתונה מקבילית ABCD .

הצלע AB משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה F .

המשך הצלע CB משיק למעגל בנקודה G

(ראה ציור).

נתון: $AF = AD$.

א. הוכח כי הנקודה F נמצאת על הישר DG .

ב. נתון גם: $BO = BC$, $FC \perp DC$.

(1) הוכח כי $OF = FC$.

(2) הוכח כי $FB = \frac{1}{2}BO$.

תשובה לשאלה 4

א. נתון: ABCD — מקבילית

BF ו־ BG משיקים למעגל

$AF = AD$

צ"ל: $\sphericalangle AFD + \sphericalangle AFG = 180^o$

הוכחה:

$FB = BG$	שני משיקים למעגל, היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
$\Downarrow$	
$\sphericalangle FGB = \sphericalangle GFB = \alpha$	במשולש מול צלעות שוות יש זוויות שוות.
$\Downarrow$	
במשולש FBG מתקיים: $\sphericalangle FBG = 180^o - 2\alpha$	סכום זוויות במשולש הוא 180° .
$\sphericalangle FBG = \sphericalangle A$	כי הן זוג זוויות מתחלפות בין מקבילים.
$\sphericalangle AFD = \sphericalangle ADF$	במשולש מול צלעות שוות יש זוויות שוות.
$\Downarrow$	
$\sphericalangle AFD = \frac{180^0 - \sphericalangle A}{2}$	סכום זוויות במשולש הוא 180°
$\Downarrow$	
$\sphericalangle AFD = \frac{180^o - (180^o - 2\alpha)}{2} = \alpha$	

מצאנו $\sphericalangle GFB = \alpha$,

לכן: $\sphericalangle AFG = 180^o - \sphericalangle GFB = 180^o - \alpha$ F על הצלע AB .

$\sphericalangle AFD + \sphericalangle AFG = \alpha + 180^0 - \alpha = 180^o$

/המשך בעמוד 8/

המשך תשובה לשאלה 4.

ב. (1) $\sphericalangle OFB = 90^o$ משיק למעגל מאונך לרדיוס

לפי הנתון: $\sphericalangle DCF = 90^o$

$\Downarrow$

$\sphericalangle BFC = \sphericalangle DCF = 90^o$ זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות זו לזו

$\Downarrow$

$\sphericalangle BFC + \sphericalangle OFB = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Downarrow$

F על הישר OC

$\Downarrow$

$OF = FC$ BF גובה במשולש שווה־שוקיים OBC , לכן BF גם תיכון לצלע OC .

(2) $\sphericalangle FBC = 180^o - \sphericalangle FBG = 180^o - (180^o - 2\alpha) = 2\alpha$ זוויות צמודות משלימות ל־ 180°

$\Downarrow$

I. $\sphericalangle FBO = \sphericalangle FBC = 2\alpha$ BF גובה במשולש שווה־שוקיים OBC , לכן BF גם חוצה־זווית $\sphericalangle OBC$

II. $\sphericalangle FBO = \sphericalangle GBO = \frac{1}{2}\sphericalangle FBG = 90^o - \alpha$ קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

מ־ I ו־ II מקבלים: $90^o - \alpha = 2\alpha$

$\Downarrow$

$\alpha = 30^o$

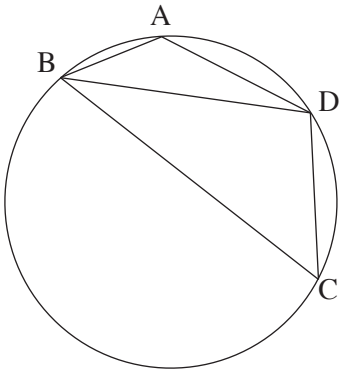
$\sphericalangle FOB = 90^o - \sphericalangle FBO = 90^o - (90^o - \alpha) = \alpha$ סכום זוויות במשולש הוא 180°

$\Downarrow$

$FB = \frac{1}{2}BO$ אם במשולש ישר זווית יש זווית חדה של 30°, הניצב מול זווית זו שווה לחצי היתר.

/המשך בעמוד 9/

שאלה 5



מרובע ABCD חסום במעגל.

המיתר BD חוצה את הזווית ABC (ראה ציור).

נתון: $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$,

$\sphericalangle ADC = 120^o$.

א. (1) מצא את גודל הזווית ABD .

(2) מצא את אורך המיתר BD .

ב. נקודה K נמצאת על המיתר BD

כך ש־ $\Delta ABK \sim \Delta DBA$ בהתאמה.

מצא את שטח המשולש ABK .

תשובה לשאלה 5

א. (1) $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^o$ במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא 180°

$\Downarrow$

$\sphericalangle ABC = 180^o - 120^o = 60^o$

$\Downarrow$

$\frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD = 30^o$ לפי הנתון BD חוצה $\sphericalangle ABC$

(2) $AD = DC = a$ במעגל לזוויות היקפיות שוות יש מיתרים שווים

לפי משפט הקוסינוסים במשולש ABD : $a^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \sphericalangle ABD$

$\Downarrow$

I. $a^2 = 3 + BD^2 - 2\sqrt{3} \cdot BD \cos 30^o$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש CBD: $a^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cos \sphericalangle DBC$

$\Downarrow$

II. $a^2 = 9 \cdot 3 + BD^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot BD \cos 30^o$

מהחסרת I מ־ II מקבלים: $0 = 24 - 6 \cdot BD$

$\Downarrow$

$BD = 4$

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה לשאלה 5.

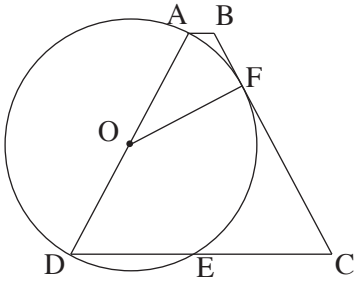
ב. $\frac{S_{\Delta DBA}}{S_{\Delta ABK}} = \frac{BD^2}{AB^2} = \frac{4^2}{3}$ במשולשים דומים יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון

$$S_{\Delta DBA} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \sphericalangle ABD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABK} = \frac{3}{4^2} \cdot S_{\Delta DBA} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

/המשך בעמוד 11/

שאלה 6



נתון טרפז שווה־שוקיים $ABCD$ $(AD = BC)$.

השוק AD היא קוטר במעגל שמרכזו O.

השוק BC משיקה למעגל בנקודה F.

המעגל חותך את הבסיס DC בנקודה E (ראה ציור).

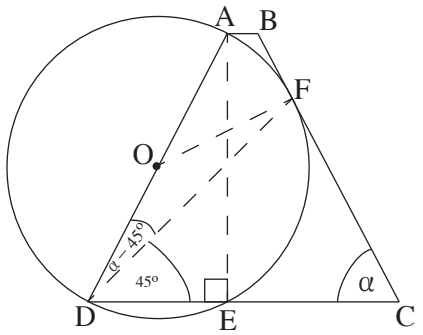
נתון: $\sphericalangle BCD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α את גודל הזווית FOD.

ב. (1) הבע באמצעות α את גודל הזווית ODF.

(2) הבע באמצעות α את היחס $\frac{DE}{DC}$.

תשובה לשאלה 6



א.	$\sphericalangle OFC = 90^o$	משיק מאונך לרדיוס
	$\sphericalangle ODC = \sphericalangle FCD = \alpha$	בטרפז שווה־שוקיים זוויות הבסיס שוות
	$\sphericalangle FOD = 360^o - (90^o + 2\alpha)$	סכום זוויות במרובע הוא 360°
	$\Downarrow$	
	$\sphericalangle FOD = 270^o - 2\alpha$	

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה לשאלה 6.

ב. (1) $OD = OF$ רדיוסים במעגל

$\Downarrow$

$\sphericalangle ODF = \sphericalangle OFD$ במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות

$\Downarrow$

$$\sphericalangle ODF = \frac{180^o - \sphericalangle FOD}{2} = \alpha - 45^o$$

(2) $\sphericalangle AED = 90^o$ זווית היקפית הנשענת על קוטר

$\Downarrow$

במשולש ADE מתקיים: I. $DE = AD\cos\alpha = 2R\cos\alpha$

$$\sphericalangle FDC = \sphericalangle ODC - \sphericalangle ODF = \alpha - (\alpha - 45^o) = 45^o$$

לפי משפט הסינוסים

במשולש DFC:

$$\frac{DC}{\sin(180^o - (45^o + \alpha))} = \frac{DF}{\sin\alpha}$$

$\Downarrow$

II. $$DC = \frac{DF\sin(45^o + \alpha)}{\sin\alpha}$$

במשולש שווה־שוקיים DOF

מתקיים:

$$\frac{\frac{1}{2}DF}{R} = \cos(\alpha - 45^o)$$

$\Downarrow$

III. $DF = 2R\cos(\alpha - 45^o)$

מהצבת III ב־ II

מקבלים:

IV. $$DC = \frac{2R\cos(\alpha - 45^o)\sin(45^o + \alpha)}{\sin\alpha}$$

מ־ I ו־ IV מקבלים:

$$\frac{DE}{DC} = \frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos(\alpha - 45^o)\sin(45^o + \alpha)}$$

/המשך בעמוד 13/

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \cos\frac{x}{2}$ בתחום $2\pi \le x \le 5\pi$.

א. (1) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.

(2) הראה כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום הנתון.

(3) רק על פי התשובות לתת־סעיפים (1) ו־ (2), סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

(4) כמה פתרונות יש למשוואה $f'(x) = 40$ בתחום הנתון? נמק.

ב. (1) רשום את הערך המקסימלי של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון .

(2) האם השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון, שווה לערך של האינטגרל המסוים $\int_{2\pi}^{5\pi} (f'(x) - f''(x))\,dx$? נמק.

תשובה לשאלה 7

א. (1) <u>דרך I</u>

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Downarrow$$

$f''(x) \ne 0$ כי $\cos\frac{x}{2} \ne -8$

$$\Downarrow$$

אין נקודות קיצון פנימיות ל־ $f'(x)$

נציב למשל $x = 4\pi$ ונקבל: $f''(4\pi) = 1\frac{3}{4} > 0$

$$\Downarrow$$

$f''(x) > 0$ לכל x בתחום הנתון

$$\Downarrow$$

$f'(x)$ עולה לכל x בתחום הנתון

<u>דרך II</u>

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Downarrow$$

מאחר ש־ $-\frac{1}{4} \le \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2} \le \frac{1}{4}$

נקבל: $f''(x) > 0$ לכל x בתחום הנתון

/המשך בעמוד 14/

המשך תשובה לשאלה 7.

(2) $f'(x)$ עולה לכל x בתחום הנתון

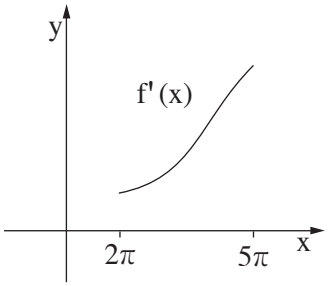
$\Downarrow$

הערך המינימלי של $f'(x)$: $f'(2\pi) = 4\pi + \frac{1}{2}\sin\pi = 4\pi$

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$ לכל x בתחום הנתון

(3) לפי תת־סעיפים א(1) ו־א(2) $f'(x)$ חיובית ועולה (לא נדרש לבדוק נקודות פיתול):



(4) $f'(x)$ עולה לכל x בתחום הנתון

$\Downarrow$

הערך המקסימלי של $f'(x)$: $f'(5\pi) = 10\pi + \frac{1}{2}\sin 2.5\pi = 31.9$

$\Downarrow$

הישר $y = 40$ אינו חותך את $f'(x)$

$\Downarrow$

אין פתרון למשוואה $f'(x) = 40$

/המשך בעמוד 15/

המשך תשובה לשאלה 7.

ב. (1) מצאנו: $f''(x) = 2 + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$

הערך המקסימלי של $\cos\frac{x}{2}$ הוא 1 ,

לכן הערך המקסימלי של $f''(x)$ הוא: $2\frac{1}{4}$

(2) מצאנו בתת־סעיף א(2) כי בתחום הנתון

הערך המינימלי של $f'(x)$ הוא: 4π

בתחום הנתון הערך המקסימלי של $f''(x)$

קטן מהערך המינימלי של $f'(x)$

לכן בתחום הנתון: $f'(x) > f''(x)$

$\Downarrow$

הגרף של $f'(x)$ מעל לגרף של $f''(x)$

$\Downarrow$

השטח שווה לערך של האינטגרל

/המשך בעמוד 16/

שאלה 8

נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x , ונתונה הפונקציה $g(x)$.

נתון: $g(x) = k + 2x$, $\int_0^1 g(x)\,dx = 0$. k הוא פרמטר.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. נתון גם כי בתחום $x \geq 0$ מתקיים: $f(x) \geq g(x)$, $f''(x) > 0$, $f(0) = k$.
סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $x \geq 0$. נמק.

ג. בתחום $x \geq 0$ איזה שטח גדול יותר: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ והצירים או השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = 1$?
נמק.

ד. נתון גם: $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + f(0)$, a הוא פרמטר,
הגרף של $g(x)$ משיק לגרף של $f(x)$ בנקודה הנמצאת בתחום $x \geq 0$.
מצא את הפונקציה $f(x)$.

תשובה לשאלה 8

א.
$$\int_0^1 g(x)\,d(x) = \int_0^1 (k + 2x)\,dx = [k \cdot x + x^2]_0^1 = k \cdot 1 + 1$$
$$\Downarrow$$
$$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$$
$$\Downarrow$$
$$g(x) = -1 + 2x$$
$$g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) = -1$$

נקודות חיתוך
עם הצירים: $(0, -1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

/המשך בעמוד 17/

המשך תשובה לשאלה 8.

ב. נתון בתחום $x \geq 0$: $f''(x) > 0$, $g(x)$ היא קו ישר

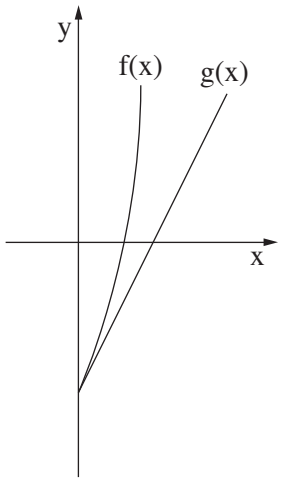
$\Downarrow$

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$

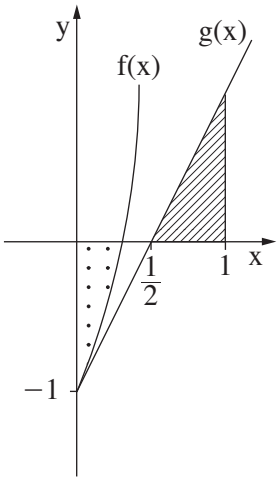
נתון גם: $f(x) \geq g(x)$, ומצאנו $f(0) = g(0) = -1$

לכן: הגרף של $f(x)$ ממש מעל לגרף של $g(x)$ לכל x שונה מ־ 0

מכאן בתחום $x \geq 0$:



ג. I. שטח המשולש, הנוצר על ידי הישרים $g(x)$ ו־ $x = 1$ ועל ידי ציר ה־ x , שווה לשטח המשולש הנוצר על ידי הישר $g(x)$ והצירים (ראה ציור).



II. השטח המנוקד בציור קטן משטח המשולש הנוצר על ידי $g(x)$ והצירים, כי $f(x)$ מעל $g(x)$ מלבד ב־ $x = 0$.

לכן על פי I ו־ II בתחום $x \geq 0$:

השטח המוגבל על ידי $f(x)$ והצירים (השטח המנוקד) <u>קטן</u>

משטח המוגבל על ידי $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי $x = 1$ (השטח המקווקו בציור).

/המשך בעמוד 18/

המשך תשובה לשאלה 8.

ד. מגזירת $f(x)$ נקבל: $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$ III.

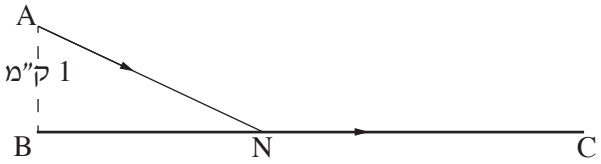
$g(x)$ משיק ל־ $f(x)$ ב־ $x = 0$, לכן: $f'(0) = 2$ IV.

מ־ III ו־ IV מקבלים: $a = 2$

לכן מקבלים: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

/המשך בעמוד 19/

שאלה 9



דני יצא מנקודה A , הנמצאת בשדה

במרחק 1 ק"מ מהכביש BC .

הוא הלך בשדה בקו אלכסוני

במהירות קבועה v ,

והגיע לכביש BC בנקודה כלשהי N (ראה ציור).

דני הלך בכביש במהירות הגדולה פי $\frac{13}{12}$ מהמהירות שבה הלך בשדה, והגיע

לנקודה C בכביש.

המרחק בין B ל־ C הוא 6 ק"מ.

מהו אורך המסלול ANC אם ידוע שדני עבר אותו בזמן המינימלי?

תשובה לשאלה 9

א. נסמן למשל:

$$BN = x$$

$$\Downarrow$$

$$AN = \sqrt{1+x^2} \quad , \; NC = 6 - x$$

$$\Downarrow$$

הזמן שדני עובר את המסלול ANC:

$$t(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{v} + \frac{6-x}{\frac{13}{12}\cdot v}$$

$$\Downarrow$$

$$t'(x) = \frac{1}{v}\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{12}{13}\right)$$

$$t'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 13x = 12\sqrt{1+x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$13^2x^2 = 12^2(1+x^2)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{12}{5} = 2.4 \qquad (x > 0)$$

בדיקת מינימום:

$$t'(1) = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{12}{13}\right) < 0$$

$$t'(3) = \frac{1}{v}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{12}{13}\right) > 0$$

אורך המסלול ANC המינימלי:

$$AN + NC = \sqrt{1+x^2} + 6 - x$$

$$\Downarrow$$

$$AN + NC = \sqrt{1+2.4^2} + 6 - 2.4 = 6.2 \text{ ק"מ}$$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ג, 2013
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
			סה"כ		—	100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, <u>גם</u> כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את <u>כל</u> פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. פועל I ופועל II עובדים במפעל לייצור חלקי חילוף.

שני הפועלים מבצעים יחד עבודה מסוימת.

קצב העבודה הרגיל של פועל I שונה מקצב העבודה הרגיל של פועל II .

אם כל אחד מהפועלים יגביר את קצב העבודה הרגיל שלו ב־ 50% ,

ההפרש בין זמן העבודה של שני הפועלים יחד בקצב הרגיל ובין זמן העבודה שלהם יחד בקצב המוגבר יהיה $\frac{2}{15}$ מהזמן שנדרש לפועל I לבצע לבד את העבודה בקצב הרגיל שלו.

א. מצא את היחס בין הזמן שבו פועל I מבצע לבד את העבודה ובין הזמן שבו פועל II מבצע לבד עבודה זו.

ב. העבודה ששני הפועלים מבצעים יחד היא הכנה של 300 חלקי חילוף.

הפועלים ביצעו יחד עבודה זו בקצב הרגיל שלהם ב־ 6 ימים.

כמה חלקי חילוף ביום מכין לבד פועל I בקצב הרגיל שלו?

2. נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא:

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2)]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ־ 102 .

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול להתקבל עבור סכום מסוים של איברים כאלה (לאו דווקא הסכום של כל האיברים).

/המשך בעמוד 3/

3. הוועדה המארגנת של התחרות "נולד לשיר" מתלבטת אם ישפוט בתחרות רק שופט א'

או יצטרפו אליו שני שופטים נוספים: שופט ב' ושופט ג'.

ההצבעה של שופט א' לא תשתנה אם הוא ישפוט לבד או אם ישפוט עם האחרים.

ההצבעה של כל אחד מהשופטים אינה תלויה בהצבעה של השופטים האחרים.

אם ישפוט בתחרות רק שופט א' — יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות

אם השופט יצביע בעדו.

אם ישפטו שלושת השופטים — יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות

אם לפחות 2 מהשופטים יצביעו בעדו.

יוסי הוא אחד המתמודדים בתחרות. נתון כי ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי שווה

להסתברות ששופט ב' יצביע בעדו. ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5 .

א. האם ההסתברות, שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות רק שופט א',

שווה להסתברות שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפטו בתחרות שלושת

השופטים? נמק.

ב. לבסוף הוחלט שבתחרות ישפטו שלושת השופטים.

נתון כי ההסתברות, ששופט א' הצביע בעד יוסי אם ידוע כי יוסי עבר לשלב נוסף בתחרות,

גדולה מ־ 0.8 .

מצא את תחום הערכים של ההסתברות ששופט א' הצביע בעד יוסי.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

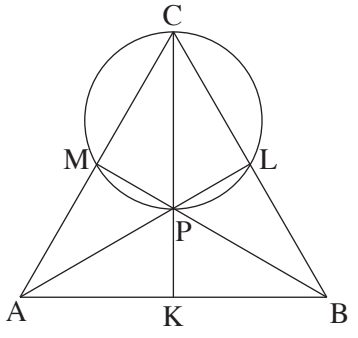
4. א. הוכח כי אם במשולש שני תיכונים שווים זה לזה, המשולש הוא שווה־שוקיים.

ב. במשולש ABC הנקודות L, M, ו־K הן אמצעי הצלעות CB, CA ו־AB בהתאמה. הנקודה P היא נקודת מפגש של התיכונים במשולש, ונתון שהיא נמצאת על מעגל העובר דרך הנקודות L, M ו־C (ראה ציור).

נתון גם כי $AL = BM$.

(1) הוכח כי $BM \perp AC$.

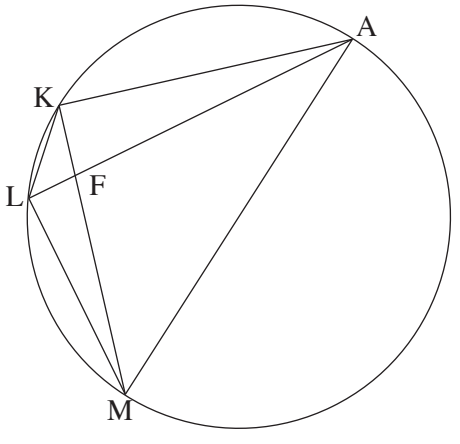
(2) הוכח כי $AK = AM$.



5. מרובע AKLM חסום במעגל. AM הוא קוטר. אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה F (ראה ציור).

נתון: $ML =$ 30 ס"מ , $FL =$ a ס"מ

שטח המשולש ALK קטן פי 3 משטח המשולש ALM.



א. מצא את אורך הגובה לצלע LA במשולש ALK.

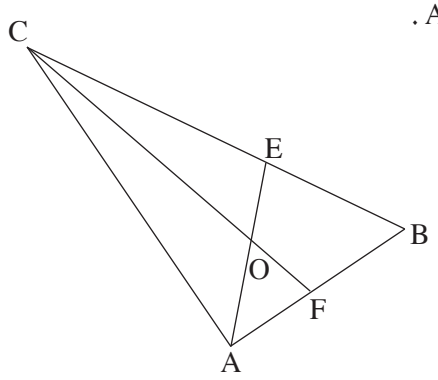
ב. הבע באמצעות a את אורך הקטע KF.

ג. הוכח כי $\Delta AFM \sim \Delta KFL$.

ד. נתון גם: $AF =$ 42.5 ס"מ , $ML > a$.

מצא את a.

/המשך בעמוד 5/



6. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E .

המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F

(ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

א. הבע באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ב. נתון גם: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60^o$.

הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB שווה ל־ $\frac{1}{2}BC$.

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $g(x) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{7}{3}\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$

עם גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ y .

(1) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB .

(2) כמה קטעים כמו AB שאורכם מקסימלי מתקבלים בתחום הנתון? נמק.

/המשך בעמוד 6/

8. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 + 4x + b$

$g(x) = -x^2 + c$

b ו־ c הם פרמטרים גדולים מ־ 0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P .

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P .

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי $b > 4$.

הישר $x = a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D , את הגרף של $f(x)$ בנקודה A

ואת הגרף של $g(x)$ בנקודה B (A , D ו־ B הן שלוש נקודות שונות).

ג. הראה כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB .

ד. השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי המשיק המשותף

ועל ידי הישרים $x = a$ ו־ $x = -a$, הוא S .

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הגרף של $g(x)$

ועל ידי הישרים $x = a$ ו־ $x = -a$.

/המשך בעמוד 7/

9. נתון כי הפונקציה הזוגית $f(x) = \sqrt{8 - ax + bx^2} + c$ מוגדרת

בתחום $-2 \le x \le 2$ בלבד.

a, b ו־c הם פרמטרים, $c > 0$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a ואת הערך של הפרמטר b.

הצב את הערך של a ואת הערך של b, וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$,

ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\sqrt{2}$.

השטח המוגבל על ידי שני המשיקים ועל ידי ציר ה־x הוא $\frac{49\sqrt{2}}{2}$.

מצא את הערך של הפרמטר c.

ג. בתחום $-2 \le x \le 2$ נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = -f(x)$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$,

ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\sqrt{2}$.

מהו סוג המרובע שנוצר על ידי שני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$

ושני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ג, 2013
מספר השאלון: 035806, 316

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה				
		במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

פועל I ופועל II עובדים במפעל לייצור חלקי חילוף.

שני הפועלים מבצעים יחד עבודה מסוימת.

קצב העבודה הרגיל של פועל I שונה מקצב העבודה הרגיל של פועל II .

אם כל אחד מהפועלים יגביר את קצב העבודה הרגיל שלו ב־ 50% ,

ההפרש בין זמן העבודה של שני הפועלים יחד בקצב הרגיל ובין זמן העבודה שלהם יחד בקצב המוגבר יהיה $\frac{2}{15}$ מהזמן שנדרש לפועל I לבצע לבד את העבודה בקצב הרגיל שלו.

א. מצא את היחס בין הזמן שבו פועל I מבצע לבד את העבודה ובין הזמן שבו פועל II מבצע לבד עבודה זו.

ב. העבודה ששני הפועלים מבצעים יחד היא הכנה של 300 חלקי חילוף.

הפועלים ביצעו יחד עבודה זו בקצב הרגיל שלהם ב־ 6 ימים.

כמה חלקי חילוף ביום מכין לבד פועל I בקצב הרגיל שלו?

תשובה לשאלה 1

א.

	זמן העבודה (ימים)	קצב העבודה $(\frac{1}{\text{יום}})$	סה"כ עבודה
פועל I : בקצב רגיל	x	$\frac{1}{x}$	1
בקצב מוגבר	$\frac{x}{1.5}$	$\frac{1.5}{x}$	1
פועל II: בקצב רגיל	y	$\frac{1}{y}$	1
בקצב מוגבר	$\frac{y}{1.5}$	$\frac{1.5}{y}$	1
פועל I ופועל II יחד: בקצב רגיל	t	$\frac{1}{t}$	1
בקצב מוגבר	T	$\frac{1}{T}$	1

/המשך בעמוד 3/

המשך תשובה לשאלה 1.

I. $\frac{t}{x}+\frac{t}{y}=1 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{xy}{y+x}$

II. $\frac{1.5}{x}\cdot T+\frac{1.5}{y}\cdot T=1 \quad \Rightarrow \quad T=\frac{xy}{1.5(y+x)}$

III. $t-T=\frac{2}{15}x$

מ־ I ו־ II ו־ III מקבלים:

$$\frac{xy}{y+x}-\frac{xy}{1.5(y+x)}=\frac{2}{15}x$$

$$\Downarrow$$

אחרי צמצום ב־ x $(x\neq 0)$:

$$\frac{x}{y}=1.5$$

ב.

I. $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1$

II. $\frac{x}{y}=1.5$

מ־ I ו־ II מקבלים: $x=$ 15 ימים

פועל I מייצר 300 חלקי חילוף ב־ 15 ימים,

לכן ביום אחד פועל I מייצר: $\frac{300}{15}=$ 20 חלקים

/המשך בעמוד 4/

שאלה 2

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא:

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2)]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ־ 102 .

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול להתקבל עבור סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים).

תשובה לשאלה 2

א. הסכום $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2)$

הוא סכום של n איברים בסדרה חשבונית

שהפרשה 4 ואיברה הראשון 2 , לכן: $S_n = n^2 - 5n + \frac{n}{2}(2 \cdot 2 + 4(n-1)) = 3n^2 - 5n$

$$\Downarrow$$

עבור $n > 1$ מתקיים: $S_{n-1} = 3(n-1)^2 - 5(n-1)$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = 6n - 8$$

נבדוק אם הנוסחה $a_n = 6n - 8$

נכונה גם עבור $n = 1$: $a_1 = S_1 = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -2 \quad , \quad 6n - 8 = 6 \cdot 1 - 8 = -2$

$$\Downarrow$$

הנוסחה $a_n = 6n - 8$ נכונה לכל n

/המשך בעמוד 5/

המשך תשובה לשאלה 2.

ב.

$$a_n < 102$$

$$\Downarrow$$

$$6n - 8 < 102$$

$$\Downarrow$$

$$n < 18\frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

מספר האיברים הקטנים מ־ 102: $n = 18$

מספר האיברים השליליים: $a_n < 0$

$$\Downarrow$$

$$n < \frac{8}{6}$$

$$\Downarrow$$

$$n = 1$$

האיבר השלילי היחיד הוא: $a_1 = 6 - 8 = -2$

לכן הסכום המקסימלי הוא: $a_2 + a_3 + ... + a_{18} = S_{18} - a_1 = 3 \cdot 18^2 - 5 \cdot 18 + 2 = 884$

/המשך בעמוד 6/

שאלה 3

הוועדה המארגנת של התחרות "נולד לשיר" מתלבטת אם ישפוט בתחרות רק שופט א'

או יצטרפו אליו שני שופטים נוספים: שופט ב' ושופט ג'.

ההצבעה של שופט א' לא תשתנה אם הוא ישפוט לבד או אם ישפוט עם האחרים.

ההצבעה של כל אחד מהשופטים אינה תלויה בהצבעה של השופטים האחרים.

אם ישפוט בתחרות רק שופט א' — יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות

אם השופט יצביע בעדו.

אם ישפטו שלושת השופטים — יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות

אם לפחות 2 מהשופטים יצביעו בעדו.

יוסי הוא אחד המתמודדים בתחרות. נתון כי ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי שווה

להסתברות ששופט ב' יצביע בעדו. ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5 .

א. האם ההסתברות, שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות רק שופט א',

שווה להסתברות שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפטו בתחרות שלושת

השופטים? נמק.

ב. לבסוף הוחלט שבתחרות ישפטו שלושת השופטים.

נתון כי ההסתברות, ששופט א' הצביע בעד יוסי אם ידוע כי יוסי עבר לשלב נוסף בתחרות,

גדולה מ־ 0.8 .

מצא את תחום הערכים של ההסתברות ששופט א' הצביע בעד יוסי.

תשובה לשאלה 3

א. לפי הנתון: $P(\text{א' בעד}) = P(\text{ב' בעד}) = x \quad , \quad P(\text{ג' בעד}) = 0.5$

$$P(\text{לפחות 2 בעד}) = P(\text{א' בעד}\cap\text{ב' בעד}\cap\text{ג' בעד}) + P(\text{א' בעד}\cap\text{ב' נגד}\cap\text{ג' בעד}) + P(\text{א' נגד}\cap\text{ב' בעד}\cap\text{ג' בעד}) + P(\text{א' בעד}\cap\text{ב' בעד}\cap\text{ג' נגד})$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{לפחות 2 בעד}) = x\cdot x\cdot 0.5 + x\cdot(1-x)\cdot 0.5 + (1-x)\cdot x\cdot 0.5 + x\cdot x\cdot 0.5$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{לפחות 2 בעד}) = x$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{לפחות 2 בעד}) = P(\text{א' בעד})$$

/המשך בעמוד 7/

המשך תשובה לשאלה 3.

ב.

$$P(\text{א' בעד} / \text{לפחות 2 בעד}) = \frac{P(\text{ג' נגד} \cap \text{ב' בעד} \cap \text{א' בעד}) + P(\text{ג' בעד} \cap \text{ב' נגד} \cap \text{א' בעד}) + P(\text{ג' בעד} \cap \text{ב' בעד} \cap \text{א' בעד})}{P(\text{לפחות 2 בעד})}$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{א' בעד} / \text{לפחות 2 בעד}) = \frac{x \cdot x \cdot 0.5 + x(1-x) \cdot 0.5 + x \cdot x \cdot 0.5}{x} > 0.8$$

$$\Downarrow$$

$$x > 0.6$$

סה"כ: $0.6 < x \leq 1$

/המשך בעמוד 8/

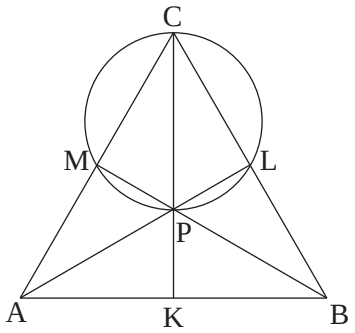
שאלה 4

א. הוכח כי אם במשולש שני תיכונים שווים זה לזה, המשולש הוא שווה־שוקיים.

ב. במשולש ABC הנקודות L , M , ו־ K הן אמצעי הצלעות CB , CA ו־ AB בהתאמה. הנקודה P היא נקודת מפגש של התיכונים במשולש, ונתון שהיא נמצאת על מעגל העובר דרך הנקודות L , M ו־ C (ראה ציור).
נתון גם כי AL = BM .

(1) הוכח כי BM ⊥ AC .

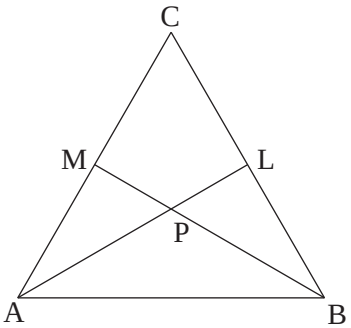
(2) הוכח כי AK = AM .



תשובה לשאלה 4

א. נתון: $AM = \frac{1}{2}AC \quad , \quad BL = \frac{1}{2}BC \quad , \quad AL = BM$

צ"ל: $AC = BC$



<u>הוכחה</u>

$$\begin{cases} AP = \frac{2}{3}AL \quad , \quad BP = \frac{2}{3}BM \\ PL = \frac{1}{3}AL \quad , \quad PM = \frac{1}{3}BM \end{cases}$$ נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 1:2

לפי הנתון: $AL = BM$

לכן: $AP = BP \quad , \quad PL = PM$

$\sphericalangle APM = \sphericalangle BPL$ זוויות קדקודיות שוות זו לזו

לכן: $\Delta APM \cong \Delta BPL$ על פי צ.ז.צ

$\Downarrow$

$AM = BL$ במשולשים חופפים מול זוויות שוות צלעות שוות

לפי הנתון: $AM = \frac{1}{2}AC \quad , \quad BL = \frac{1}{2}BC$

$\Downarrow$

$AC = BC$

/המשך בעמוד 9/

המשך תשובה לשאלה 4.

ב.(1) דרך I

$AC = BC$	על פי סעיף א אם התיכונים שווים, אז המשולש הוא שווה־שוקיים
$\Downarrow$	
$MC = LC$	M ו־ L אמצעי השוקיים במשולש שווה־שוקיים
CK תיכון לבסיס במשולש שווה־שוקיים	K אמצע BC
$\Downarrow$	
CK חוצה $\sphericalangle ACB$	
$\Downarrow$	
CP גובה ותיכון במשולש שווה־שוקיים CML	
$\Downarrow$	
CP קוטר במעגל החוסם ΔCML	מרכז מעגל חוסם נמצא על אנך אמצעי במשולש
$\Downarrow$	
$PM \perp MC$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא 90°

דרך II

$AC = BC$	אם התיכונים שווים, אז המשולש הוא שווה־שוקיים
$\Downarrow$	
$MC = LC$	M ו־ L אמצעי השוקיים במשולש שווה־שוקיים
$PL = PM$	הראנו בסעיף א
CP צלע משותפת	
$\Downarrow$	
$\Delta CMP \cong \Delta CLP$	על פי צ. צ. צ.
$\Downarrow$	
I. $\sphericalangle CMP = \sphericalangle CLP$	במשולשים חופפים מול צלעות שוות זוויות שוות
II. $\sphericalangle CMP + \sphericalangle CLP = 180^o$	סכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל הוא 180°

מ־ I ו־ II מקבלים: $\sphericalangle CMP = 90^o$

/המשך בעמוד 10/

המשך תשובה לשאלה 4.

(2) לפי ב (1): BM תיכון וגובה לצלע AC

$\Downarrow$

$AB = BC$ אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה־שוקיים

לפי ב (1): $AC = BC$

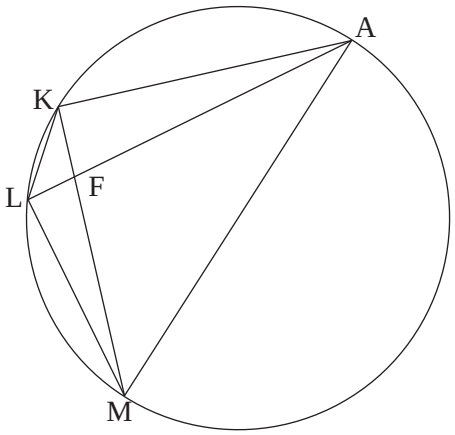
לכן: $AC = AB$

לפי הנתון: $AK = \frac{1}{2}AB \quad , \quad AM = \frac{1}{2}AC$

לכן: $AK = AM$

/המשך בעמוד 11/

שאלה 5



מרובע AKLM חסום במעגל. AM הוא קוטר.

אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה F

(ראה ציור).

נתון: 30 ס"מ = ML , a ס"מ = FL

שטח המשולש ALK קטן פי 3

משטח המשולש ALM.

א. מצא את אורך הגובה לצלע LA

במשולש ALK .

ב. הבע באמצעות a את אורך הקטע KF .

ג. הוכח כי $\Delta AFM \sim \Delta KFL$.

ד. נתון גם: 42.5 ס"מ = AF , $ML > a$.

מצא את a .

תשובה לשאלה 5

א. $\sphericalangle ALM = 90^o$ זווית היקפית הנשענת על קוטר

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ALM} = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot 30$$

על פי הנתון: $S_{\Delta ALK} = \frac{1}{3} S_{\Delta ALM}$

$$\Downarrow$$

$\frac{1}{2} \cdot h \cdot AL = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AL \cdot 30$ (h — גובה לצלע LA)

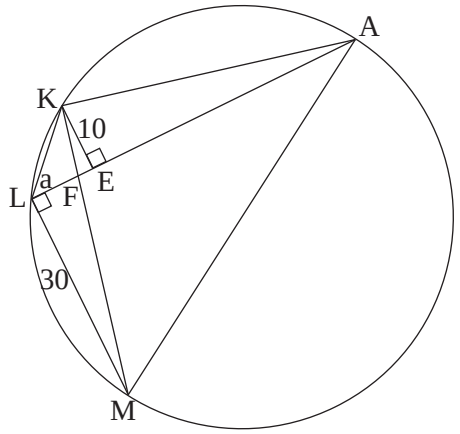
$$\Downarrow$$

h = 10 ס"מ

/המשך בעמוד 12/

המשך תשובה לשאלה 5.

ב.



$\sphericalangle LFM = \sphericalangle EFK$ זוויות קדקודיות שוות זו לזו

$\sphericalangle KEF = \sphericalangle MLF = 90^o$

$\Downarrow$

$\Delta LFM \sim \Delta EFK$ על פי ז.ז.

$\Downarrow$

$\frac{10}{FE} = \frac{30}{a} \quad \Rightarrow \quad FE = \frac{a}{3}$

לפי פיתגורס במשולש EFK : $KF = \sqrt{(\frac{a}{3})^2 + 10^2} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 900}$

ג.

$\sphericalangle LFK = \sphericalangle MFA$ זוויות קדקודיות שוות זו לזו

$\sphericalangle LKF = \sphericalangle FAM$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת

$\Downarrow$

$\Delta LFK \sim \Delta MFA$ על פי ז.ז.

ד. מהדמיון שבסעיף ג מקבלים: I. $\frac{KF}{a} = \frac{AF}{FM}$

לפי סעיף ב: II. $KF = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 900}$

לפי פיתגורס במשולש LFM : III. $FM = \sqrt{a^2 + 30^2}$

לפי הנתון: IV. $AF =$ 42.5 ס"מ

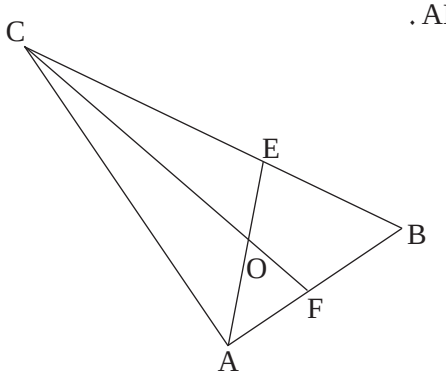
מ־ I , II , III ו־ IV מקבלים: $a^2 - 127.5a + 900 = 0$

$\Downarrow$

$a =$ 7.5 ס"מ

/המשך בעמוד 13/

שאלה 6



הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E .

המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F

(ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BAC = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ב. נתון גם: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60^o$.

הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB שווה ל־ $\frac{1}{2}BC$.

תשובה לשאלה 6

א.

$$\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAE = \frac{\alpha}{2}$$

מרכז מעגל החסום במשולש נמצא על חוצה זווית

$$\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF = 90^o - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

לפי משפט הסינוסים

במשולש CAE :

$$\frac{CA}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)} = \frac{AE}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{CA\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$$

לפי משפט הסינוסים

במשולש CFA:

$$\frac{CF}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin(\beta+90^o-\frac{\alpha+\beta}{2})} \quad \Rightarrow \quad CF = \frac{CA\sin\alpha}{\sin(90^o+\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

מכאן:

$$\frac{AE}{CF} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)} \cdot \frac{\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{\sin\alpha}$$

/המשך בעמוד 14/

המשך תשובה לשאלה 6.

ב. לפי הנתונים:

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^o)\cdot\cos(30^o-\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2}+60^o)\cdot\sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

מאחר ש־ $\sin(\frac{\alpha}{2}+60^o)=\cos\left[90^o-\left(\frac{\alpha}{2}+60^o\right)\right]$:

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^o)\cdot\cos(30^o-\frac{\alpha}{2})}{\cos(30^o-\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^o)}{\sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

לאחר פתיחת $\sin(\alpha+60^o)$ מקבלים:

$$\sin\alpha=2\sin 60^o\cos\alpha+2\cos 60^o\sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=90^o$$

$$\Downarrow$$

BC קוטר במעגל החוסם את המשולש ABC

$$\Downarrow$$

$$\text{רדיוס}=\frac{1}{2}BC$$

/המשך בעמוד 15/

שאלה 7

נתונה הפונקציה $g(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)$ בתחום $0\le x\le \frac{7}{3}\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$

עם גרף הפונקציה $f(x)=\sin x$.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ y .

(1) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB .

(2) כמה קטעים כמו AB שאורכם מקסימלי מתקבלים בתחום הנתון? נמק.

תשובה לשאלה 7

א. נקודת חיתוך עם ציר ה־ y:

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad g(0)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad (0\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2})$$

נקודות חיתוך עם ציר ה־ x:

$$g(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2\pi}{3}-x=\pi k \quad (\text{k שלם})$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{2\pi}{3}-\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{2\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{5\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$(\frac{2\pi}{3}\,,0) \quad , \quad (\frac{5\pi}{3}\,,0)$$

/המשך בעמוד 16/

המשך תשובה לשאלה 7.

ב. $\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin x$

$$\Downarrow$$

לפי הנוסחה של הפרש סינוסים: $\sin(x-\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}=0$

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{3}+\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{4\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{7\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

שיעורים של נקודות החיתוך בין הפונקציות: $(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad (\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad (\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$

ג. (1) $AB=d(x)=|f(x)-g(x)|$

עבור $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{4\pi}{3}$: $AB=d(x)=\sin x-\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$

$d'(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$

$d'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \cos(x-\frac{\pi}{3})=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{5\pi}{6}+\pi k \quad\Rightarrow\quad x=\frac{5\pi}{6}$

בדיקת מקסימום: $d''(x)=-\sin(x-\frac{\pi}{3}) \quad\Rightarrow\quad d''(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})<0$

עבור $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{3}$ או עבור $0\le x\le\frac{\pi}{3}$: $AB=d(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)-\sin x=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$

$d'(x)=-\cos(\frac{\pi}{3}-x)$

$d'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{11\pi}{6}$

בדיקת מקסימום: $d''(x)=-\sin(\frac{\pi}{3}-x) \quad\Rightarrow\quad d''(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6})<0$

האורך המקסימלי של הקטע AB: $\left|d(\frac{5\pi}{6})\right|=\left|d(\frac{11\pi}{6})\right|=1$

(בקצה שבו $x=0$ מקבלים כי $AB=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$, ובקצוות האחרים מקבלים כי $AB=0$.)

(2) על פי תת־סעיף ג (1), יש שני קטעים כאלה, עבור $x=\frac{5\pi}{6}$ ועבור $x=\frac{11\pi}{6}$.

/המשך בעמוד 17/

שאלה 8

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 + 4x + b$

$g(x) = -x^2 + c$

b ו־ c הם פרמטרים גדולים מ־ 0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P .

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P .

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי $b > 4$.

הישר $x = a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D , את הגרף של $f(x)$ בנקודה A

ואת הגרף של $g(x)$ בנקודה B (A , D ו־ B הן שלוש נקודות שונות).

ג. הראה כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB .

ד. השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי המשיק המשותף

ועל ידי הישרים $x = a$ ו־ $x = -a$, הוא S .

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הגרף של $g(x)$

ועל ידי הישרים $x = a$ ו־ $x = -a$.

תשובה לשאלה 8

א. לפונקציות משיק משותף

בנקודה P , לכן: $f'(x) = g'(x)$

$\Downarrow$

$2x + 4 = -2x$

$\Downarrow$

שיעור ה־ x של הנקודה P: $x = -1$

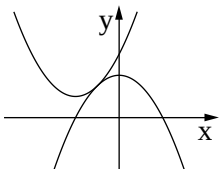
שיעור ה־ y של הנקודה P: $f(-1) = b - 3$

נקודת ההשקה: $P(-1, b-3)$

/המשך בעמוד 18/

המשך תשובה לשאלה 8.

ב.



(ל־ f(x) נקודת מינימום ב־ $(-2\,,\,b-4)$ כלומר שיעור ה־ y של נקודת המינימום הוא חיובי.

ל־ g(x) נקודת מקסימום ב־ $x=0$. שיעור ה־ x של נקודת ההשקה הוא -1 .)

ג. שיפוע המשיק בנקודה $P(-1\,,\,b-3)$: $f'(-1)=g'(-1)=2$

לכן משוואת המשיק בנקודה P: $y=2x+b-1$

$$\Downarrow$$

שיעור ה־ y של הנקודה D: $y_D=2a+b-1$

שיעור ה־ y של הנקודה A: $y_A=f(a)=a^2+4a+b$

$$f(-1)=g(-1)$$

$$\Downarrow$$

ערך הפרמטר c: $c=b-2$

$$\Downarrow$$

שיעור ה־ y של הנקודה B : $y_B=g(a)=-a^2+b-2$

$$AD=y_A-y_D=a^2+2a+1$$

$$DB=y_D-y_B=a^2+2a+1$$

$$\Downarrow$$

$$AD=BD$$

לכן PD הוא תיכון במשולש PAB .

ד.

I. $S=\int_{-a}^{a}[f(x)-(2x+b-1)]\,dx=\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$

השטח המבוקש:

II. $S_{\text{מבוקש}}=\int_{-a}^{a}[f(x)-g(x)]\,dx=2\cdot\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$

מ־ I ו־ II מקבלים: $S_{\text{מבוקש}}=2\cdot S$

/המשך בעמוד 19/

שאלה 9

נתון כי הפונקציה הזוגית $f(x)=\sqrt{8-ax+bx^2}+c$ מוגדרת

בתחום $-2\le x\le 2$ בלבד.

a, b ו־ c הם פרמטרים, $c>0$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a ואת הערך של הפרמטר b.

הצב את הערך של a ואת הערך של b, וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=\sqrt{2}$,

ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\sqrt{2}$.

השטח המוגבל על ידי שני המשיקים ועל ידי ציר ה־ x הוא $\frac{49\sqrt{2}}{2}$.

מצא את הערך של הפרמטר c.

ג. בתחום $-2\le x\le 2$ נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=-f(x)$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=\sqrt{2}$,

ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\sqrt{2}$.

מהו סוג המרובע שנוצר על ידי שני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$

ושני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

תשובה לשאלה 9

א.

מתחום ההגדרה נובע: $8-ax+bx^2\ge 0$ רק עבור $-2\le x\le 2$

לכן:

I. $8-a\cdot 2+b\cdot 2^2=0$

II. $8+a\cdot 2+b\cdot 2^2=0$

מ־ I ומ־ II מקבלים: $a=0\ ,\ \ b=-2$

/המשך בעמוד 20/

המשך תשובה לשאלה 9.

ב.

$$f(x)=\sqrt{8-2x^2}+c$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{8-2x^2}}$$

$$\Downarrow$$

שיפועי המשיקים: $f'(\sqrt{2})=-\sqrt{2}\quad,\quad f'(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$

שיעורי ה־ y של נקודות ההשקה: $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=2+c$

משוואת המשיק בנקודה $A(\sqrt{2}\ ,\ 2+c)$: $y=-\sqrt{2}\,x+4+c$

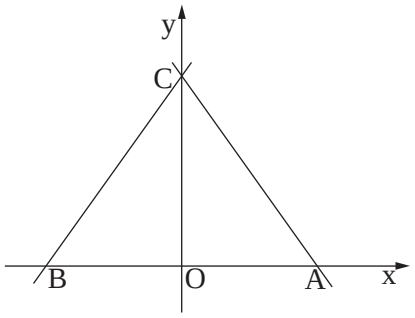
חיתוך המשיק בנקודה A עם ציר ה־ x: $x=\frac{4+c}{\sqrt{2}}$

משוואת המשיק בנקודה $B(-\sqrt{2}\ ,\ 2+c)$: $y=\sqrt{2}\,x+4+c$

חיתוך המשיק בנקודה B עם ציר ה־ x : $x=-\frac{4+c}{\sqrt{2}}$

שיעורי נקודת הפגישה C

(ראה ציור) של המשיקים: $(0\ ,\ 4+c)$



שטח המשולש ABC עבור $c>0$

(ראה ציור) הוא: $S=\frac{1}{2}y_C\cdot AB$

$$\Downarrow$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot(4+c)\cdot\left(\frac{4+c}{\sqrt{2}}+\frac{4+c}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(4+c)^2}{\sqrt{2}}=\frac{49\sqrt{2}}{2}\quad,\ c>0$$

$$\Downarrow$$

$$c=3$$

/המשך בעמוד 21/

המשך תשובה לשאלה 9.

ג.

$$g(x) = -f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g'(x) = -f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$g'(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

לכן המשיק ל־ $g(x)$ בנקודה $x = \sqrt{2}$ מקביל למשיק ל־ $f(x)$ בנקודה $x = -\sqrt{2}$,

והמשיק ל־ $g(x)$ בנקודה $x = -\sqrt{2}$ מקביל למשיק ל־ $f(x)$ בנקודה $x = \sqrt{2}$,

לכן המשיקים יוצרים מקבילית.

עקב הסימטריה המשיקים נפגשים בנקודות A ו־ B (ראה ציור).

לפי השיעורים של A , B ו־ C שמצאנו בסעיף ב, אורכי הצלעות הסמוכות שווים, $CB = CA$, והמקבילית היא מעוין.

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	חורף תשע"ג, 2013
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה"כ	— 100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. דן יצא מתל אביב להרצליה על אופניו, ורכב במהירות קבועה של v קמ"ש.
כעבור $\frac{1}{2}$ שעה מרגע היציאה של דן, גם אילנית יצאה על אופניה מתל אביב להרצליה, ורכבה באותו מסלול במהירות הגדולה ב־ 2 קמ"ש ממהירותו של דן.
אילנית ודן נפגשו בדרך להרצליה, ו־ $\frac{1}{2}$ שעה לאחר הפגישה הגיעה אילנית להרצליה.
מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות v , אם נתון כי מסלול הרכיבה מתל אביב להרצליה קטן מ־ 25 ק"מ וגדול מ־ 9 ק"מ.

2. א. (1) אם מכניסים אחד מהסימנים $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ למשבצת הריקה שבביטוי:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \ \square \ (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$
מתקבל אי־שוויון הנכון לכל n טבעי.
בחר בסימן המתאים.
(2) הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי האי־שוויון שבתת־סעיף א (1) מתקיים לכל n טבעי.
ב. נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58 , 62 , 66, ... ,(4n + 6)$
הבע את סכום הסדרה באמצעות n $(n > 12)$.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

המשך בעמוד 3

3. בחדר I נמצאים k נשים ו־ k גברים ($k > 1$). בחדר II נמצאים k נשים ו־ 3k גברים.
מטילים קובייה מאוזנת.
אם מתקבל מספר המתחלק ב־ 3 , בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר I .
אם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב־ 3 , בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר II .
כאשר בוחרים באופן זה, ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I גדולה פי $\frac{15}{7}$ מההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II .

א. מצא את k .

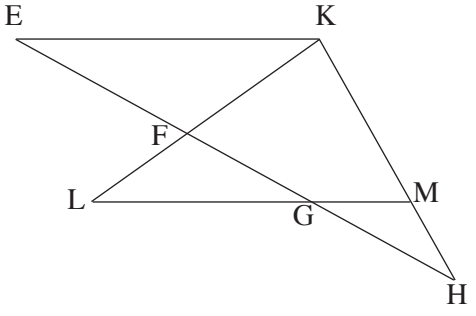
ב. מצא את ההסתברות לבחור 2 נשים באופן שתואר.

ג. ידוע שנבחר לפחות גבר אחד באופן שתואר.
מהי ההסתברות שנבחרו בדיוק 2 גברים מחדר I ?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4. נתון משולש KHE . נקודות M ו־ G נמצאות על הצלעות KH ו־ EH בהתאמה כך ש־ $GM \parallel EK$.
נקודה F נמצאת על הצלע EH .
המשכי הקטעים GM ו־ FK נפגשים בנקודה L (ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$.

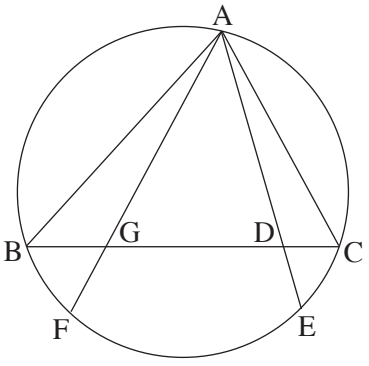
א. הוכח כי $\triangle KHE \sim \triangle FLG$.

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$, $EH =$ 12.5 ס"מ , $LG =$ 5 ס"מ .

(1) מצא את האורך של EK .

(2) מצא את היחס $\frac{MH}{KH}$.

המשך בעמוד 4



5. משולש ABC חסום במעגל.

המיתר AF חותך את BC בנקודה G .

המיתר AE חותך את BC בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $BF = BG$

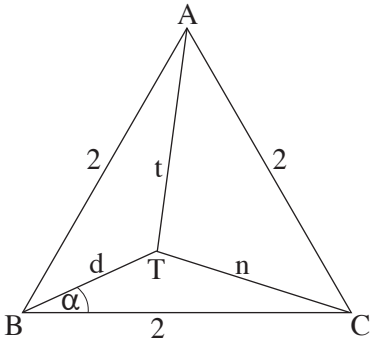
$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$

א. הוכח כי $\triangle AGB \cong \triangle ACE$.

ב. נתון גם: $CE =$ 2 ס"מ , $AC =$ 5 ס"מ ,

$GC =$ 6 ס"מ .

חשב את האורך של המיתר AE .



6. נתון משולש שווה־צלעות ABC .

נקודה T נמצאת בתוך המשולש (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle TBC = \alpha$, $CT =$ n ס"מ ,

$BT =$ d ס"מ , $AT =$ t ס"מ .

אורך צלע המשולש הוא 2 ס"מ.

א. הוכח כי $\sin(\alpha - 30^{o}) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.

ב. הבע את שטח המשולש ATC

באמצעות α ו־ d .

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות

($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3a^2}$. a הוא פרמטר, $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד ובהן $x = \pm a$.

(1) היעזר בגרף של $f(x)$, והבע באמצעות a את התחום שבו

פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית. נמק.

(2) הבע באמצעות a את שיעורי ה־x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי הישר $x = a$

ועל ידי ציר ה־x. סמן במערכת צירים את השטח המבוקש.

המשך בעמוד 6

8. נתונה הפונקציה $f(x) = -\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\sin x$ בקטע $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$.

א. בקטע הנתון מצא:

(1) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.

(2) מצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים האי־שוויון $\frac{1}{2}\sin x > \sqrt{\sin x}$?

נמק.

9. מחלקים חוט שאורכו k לשני חלקים (לאו דווקא חלקים שווים) .

מחלק אחד של החוט יוצרים מעגל ומהחלק האחר יוצרים ריבוע.

סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי כאשר היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi+4}$.

מצא את הערך של k .

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: חורף תשע"ג, 2013
מספר השאלון: 035806, 316

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה				
		במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

דן יצא מתל אביב להרצליה על אופניו, ורכב במהירות קבועה של v קמ"ש.

כעבור $\frac{1}{2}$ שעה מרגע היציאה של דן, גם אילנית יצאה על אופניה מתל אביב להרצליה, ורכבה באותו מסלול במהירות הגדולה ב־ 2 קמ"ש ממהירותו של דן.

אילנית ודן נפגשו בדרך להרצליה, ו־ $\frac{1}{2}$ שעה לאחר הפגישה הגיעה אילנית להרצליה.

מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות v , אם נתון כי מסלול הרכיבה מתל אביב להרצליה קטן מ־ 25 ק"מ וגדול מ־ 9 ק"מ.

פתרון לשאלה 1

	זמן (שעות)	מהירות (קמ"ש)	דרך (ק"מ)
דן עד הפגישה	t	v	$v \cdot t$
אילנית עד הפגישה	$t - \frac{1}{2}$	$v + 2$	$(v + 2)(t - \frac{1}{2})$
אילנית אחרי הפגישה	$\frac{1}{2}$	$v + 2$	$(v + 2) \cdot \frac{1}{2}$

אורך המסלול עד הפגישה: $\text{I.} \quad v \cdot t = (v + 2)(t - \frac{1}{2})$

הזמן שבו אילנית עוברת את כל המסלול: $t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = t$

לכן אורך כל המסלול הוא: $\text{II.} \quad S = t(v + 2)$

על ידי פתיחת סוגריים ופישוט מקבלים מ־ I: $t = \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}$

נציב t ב־ II ונקבל: $S = 0.25v^2 + v + 1$

מפתרון האי־שוויונים $9 < 0.25v^2 + v + 1 < 25$

מקבלים: $4 < v < 8$ קמ"ש

/המשך בעמוד 3/

שאלה 2

א. (1) אם מכניסים אחד מהסימנים $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ למשבצת הריקה שבביטוי:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2 \ \square \ (1+2+3+...+n)^2$$

מתקבל אי־שוויון הנכון לכל n טבעי. בחר בסימן המתאים.

(2) הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי האי־שוויון שבתת־סעיף א (1) מתקיים לכל n טבעי.

ב. נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58, 62, 66, ..., (4n+6)$

הבע את סכום הסדרה באמצעות n $(n>12)$.

<u>הערה</u>: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פתרון לשאלה 2

א. (1) הסימן המתאים הוא: $\leq$ (ולא $<$, כי אז אי־השוויון לא מתקיים עבור $n=1$.)

(2) בדיקה עבור $n=1$: $1^2 \leq 1^2$

נניח כי הטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו: $1^2+2^2+3^2+...+k^2 \leq (1+2+3+...+k)^2$

נוכיח כי הטענה נכונה עבור $k+1$, כלומר צ"ל:

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2 \leq (1+2+3+...+k+k+1)^2$$

<u>הוכחה:</u>

מהנחת האינדוקציה נובע: $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2 \leq (1+2+3+...+k)^2+(k+1)^2$

לכן מספיק להוכיח: $(1+2+3+...+k)^2+(k+1)^2 \leq (1+2+3+...+k+k+1)^2$

על פי סכום של סדרה חשבונית: $1+2+3+...+k=\frac{k}{2}(1+k)$

$$1+2+3+...+k+k+1=\frac{k+1}{2}(2+k)$$

לכן נותר להוכיח:

$$\frac{k^2}{4}(1+k)^2+(k+1)^2 \leq \frac{(k+1)^2}{4}(2+k)^2$$

$$\Updownarrow$$

לאחר הצמצום בגורם החיובי $(k+1)^2$:

$$\frac{k^2+4}{4} \leq \frac{(2+k)^2}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$k^2+4 \leq 4+4k+k^2$$

לכן הטענה נכונה לכל n טבעי

/המשך בעמוד 4/

המשך פתרון לשאלה 2. א. (2)

דרך אחרת להוכחה:

נסמן: $A = 1 + 2 + ... + k$

$B = k + 1$

לכן נותר להוכיח: $A^2 + B^2 \le (A + B)^2$

$$\Updownarrow$$

$$A^2 + B^2 \le A^2 + 2A \cdot B + B^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \le 2A \cdot B$$

מאחר ש־ $A > 0$ ו־ $B > 0$ הוכחנו את מה שנותר להוכיח.

ב. לפי הנתון: $a_1 = 58$ ו־ $d = 4$

נסמן את מספר האיברים בסדרה ב־ k .

לפי הנוסחה לאיבר כללי בסדרה חשבונית: $a_k = 58 + 4(k - 1)$ I.

לפי הנתון: $a_k = 4n + 6$ II.

מ־ I ו־ II מקבלים: $k = n - 12$

לכן: $S_k = \frac{n-12}{2}(2 \cdot 58 + 4(n - 13))$

$$\Downarrow$$

$$S_k = (n - 12)(32 + 2n)$$

/המשך בעמוד 5/

שאלה 3

בחדר I נמצאים k נשים ו־ k גברים $(k > 1)$. בחדר II נמצאים k נשים ו־ 3k גברים.

מטילים קובייה מאוזנת.

אם מתקבל מספר המתחלק ב־ 3 , בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר I .

אם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב־ 3 , בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר II .

כאשר בוחרים באופן זה, ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I גדולה פי $\frac{15}{7}$ מההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II .

א. מצא את k .

ב. מצא את ההסתברות לבחור 2 נשים באופן שתואר.

ג. ידוע שנבחר לפחות גבר אחד באופן שתואר.

מהי ההסתברות שנבחרו בדיוק 2 גברים מחדר I ?

פתרון לשאלה 3

א. ההסתברות לבחור בחדר I היא: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ההסתברות לבחור בחדר II היא: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

מכאן:

ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I היא: $P\left(\begin{matrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר I}\end{matrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{k}{2k}\cdot\frac{k-1}{2k-1}$

וההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II היא: $P\left(\begin{matrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר II}\end{matrix}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{k}{4k}\cdot\frac{k-1}{4k-1}$

לפי הנתון: $P\left(\begin{matrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר I}\end{matrix}\right) = \frac{15}{7}P\left(\begin{matrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר II}\end{matrix}\right)$

$$\Downarrow$$

מפתרון המשוואה, אחרי צמצום ב־ $k-1$, מקבלים: $k = 4$

ב. $P(\text{2 נשים}) = P\left(\begin{matrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר I}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר II}\end{matrix}\right)$

$$P(\text{2 נשים}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{15} = \frac{11}{105}$$

/המשך בעמוד 6/

המשך פתרון לשאלה 3

ג.

$$P\left(\begin{matrix}\text{2 גברים}\\ \text{מחדר I}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{לפחות}\\ \text{גבר 1}\end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix}\text{2 גברים}\\ \text{מחדר I}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{לפחות}\\ \text{גבר 1}\end{matrix}\right)}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{לפחות}\\ \text{גבר 1}\end{matrix}\right) = 1 - P(\text{2 נשים}) = 1 - \frac{11}{105}$$

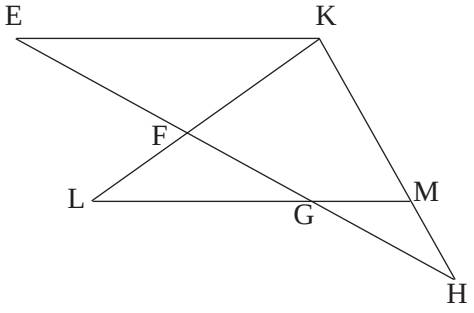
$$P\left(\begin{matrix}\text{2 גברים}\\ \text{מחדר I}\end{matrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}$$

לכן:

$$P\left(\begin{matrix}\text{2 גברים}\\ \text{מחדר I}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{לפחות}\\ \text{גבר 1}\end{matrix}\right) = \frac{15}{188}$$

/המשך בעמוד 7/

שאלה 4



נתון משולש KHE . נקודות M ו־ G נמצאות על הצלעות KH ו־ EH בהתאמה כך ש־ $GM \parallel EK$.

נקודה F נמצאת על הצלע EH .

המשכי הקטעים GM ו־ FK נפגשים בנקודה L (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$.

א. הוכח כי $\triangle KHE \sim \triangle FLG$.

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$, $EH =$ 12.5 ס"מ , $LG =$ 5 ס"מ .

(1) מצא את האורך של EK .

(2) מצא את היחס $\frac{MH}{KH}$.

פתרון לשאלה 4

א. נתון: $GM \parallel EK$

$\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$

צ"ל: $\Delta KHE \sim \Delta FLG$

<u>הוכחה</u>:

נסמן: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH = \alpha$

$\sphericalangle EKH = 180^o - \alpha$ זוויות חד־צדדיות בין מקבילים משלימות ל־ 180°

$\sphericalangle LFG = 180^o - \alpha$ זווית צמודה ל־ $\sphericalangle KFH$

$\Downarrow$

$\sphericalangle EKH = \sphericalangle LFG$

$\sphericalangle KEH = \sphericalangle FGL$ זוויות מתחלפות בין מקבילים הן שוות

$\Downarrow$

$\Delta KHE \sim \Delta FLG$ על פי ז.ז.

/המשך בעמוד 8/

המשך פתרון לשאלה 4

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$ EH = 12.5 ס"מ LG = 5 ס"מ

(1) מהנתון נובע: $\frac{EF}{FG} = \frac{3}{2}$

לפי משפט תלס <u>או</u> לפי דמיון במשולשים FKE ו־ FLG:

$$\frac{EK}{LG} = \frac{EF}{FG}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{EK}{LG} = \frac{3}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$EK = 7.5$$

(2) מהדמיון שבסעיף א נובע:

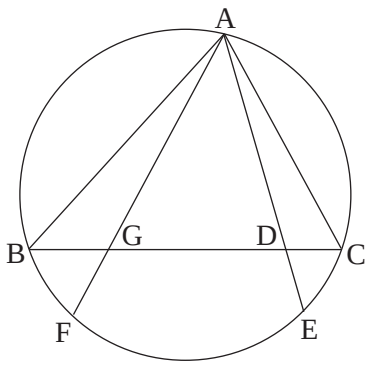
$$\frac{EK}{FG} = \frac{EH}{LG}$$
$$\Downarrow$$
$$FG = 3$$
$$\Downarrow$$
$$EG = 7.5$$
$$\Downarrow$$
$$GH = 5$$

לפי משפט תלס <u>או</u> לפי דמיון במשולשים HKE ו־ HMG:

$$\frac{MH}{KH} = \frac{GH}{EH}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{MH}{KH} = \frac{5}{12.5} = \frac{2}{5}$$

/המשך בעמוד 9/

שאלה 5



משולש ABC חסום במעגל. המיתר AF חותך את BC בנקודה G .

המיתר AE חותך את BC בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $BF = BG$ $\quad \sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$

א. הוכח כי $\triangle AGB \cong \triangle ACE$.

ב. נתון גם: $CE =$ 2 ס"מ , $AC =$ 5 ס"מ , $GC =$ 6 ס"מ .

חשב את האורך של המיתר AE .

פתרון לשאלה 5

א. נתון: $BF = BG$ $\quad \sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$

צ"ל: $\triangle AGB \cong \triangle ACE$

<u>הוכחה</u>:

$BF = CE$ זוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים

$\Downarrow$

$BG = CE$

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AEC$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת הן שוות

$\Downarrow$

$\sphericalangle AGB = \sphericalangle ACE$ סכום זוויות במשולש הוא 180°

$\Downarrow$

$\triangle AGB \cong \triangle ACE$ על פי ז.צ.ז

ב. נתון גם: $CE =$ 2 ס"מ $\quad AC =$ 5 ס"מ $\quad GC =$ 6 ס"מ

מהחפיפה בסעיף א נובע:

$AC = AG = 5$

$AB = AE$

במשולש שווה־שוקיים AGC מתקיים:

$\cos \sphericalangle AGC = \frac{3}{5}$

$\Downarrow$

$\cos \sphericalangle AGB = -\frac{3}{5}$

לפי משפט הקוסינוסים

במשולש ABG:

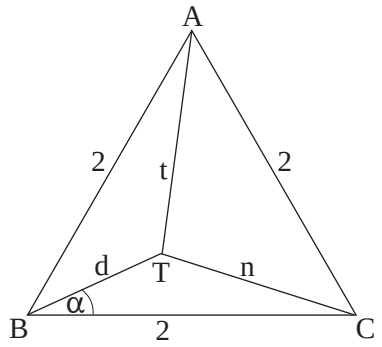
$AB^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-\frac{3}{5})$

$\Downarrow$

$AB =$ ס"מ $\sqrt{41}$ $\quad \Rightarrow \quad AE =$ ס"מ $\sqrt{41}$

/המשך בעמוד 10/

שאלה 6



נתון משולש שווה־צלעות ABC .

נקודה T נמצאת בתוך המשולש (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle TBC = \alpha$, CT = n ס"מ , BT = d ס"מ , AT = t ס"מ .

אורך צלע המשולש הוא 2 ס"מ.

א. הוכח כי $\sin(\alpha - 30^o) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.

ב. הבע את שטח המשולש ATC באמצעות α ו־ d .

פתרון לשאלה 6

א. לפי משפט הקוסינוסים במשולש BTC:

$$\text{I.}\quad n^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d\cos\alpha$$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש TBA:

$$\text{II.}\quad t^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d\cos(60^o - \alpha)$$

מ־ I ומ־ II מקבלים:

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = \cos(60^o - \alpha) - \cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

לפי הזהות להפרש הקוסינוסים:

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = -2\sin\frac{60^o}{2}\sin\frac{60^o - 2\alpha}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = \sin(\alpha - 30^o)$$

ב.

$$S_{\Delta ATC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABT} - S_{\Delta TBC}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ATC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sin 60^o - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d\sin(60^o - \alpha) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d\sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d(\sin(60^o - \alpha) + \sin\alpha)$$

/המשך בעמוד 11/

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3a^2}$. a הוא פרמטר, $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד ובהן $x = \pm a$.

(1) היעזר בגרף של $f(x)$, והבע באמצעות a את התחום שבו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית. נמק.

(2) הבע באמצעות a את שיעורי ה־x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה־x . סמן במערכת צירים את השטח המבוקש.

פתרון לשאלה 7

א. (1) $f(x)$ מוגדרת לכל x (המכנה תמיד חיובי, כי הוא סכום של מספר חיובי ומספר אי־שלילי.)

(2) נקודת החיתוך עם ציר ה־y: $(0 , \frac{2}{a^2})$. אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x .

(3) אסימפטוטה אופקית: $y = 0$

אין אסימפטוטה אנכית.

(4) $f'(x) = \frac{-12x}{(x^2 + 3a^2)^2}$ $\quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

עבור $x > 0$ $\quad f'(x) < 0$

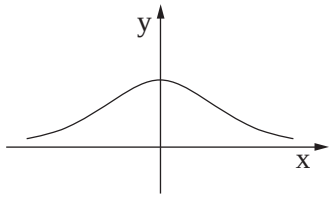
עבור $x < 0$ $\quad f'(x) > 0$

מכאן שיש מקסימום בנקודה $(0 , \frac{2}{a^2})$

/המשך בעמוד 12/

המשך פתרון לשאלה 7

ב.



ג. מהנתון נובע: $f''(a) = f''(-a) = 0$

(1) $f''(x) > 0$ עבור $x > a$ או $x < -a$, כי בתחומים אלה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$.

$f''(x) < 0$ עבור $-a < x < a$, כי בתחום זה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$.

(2)

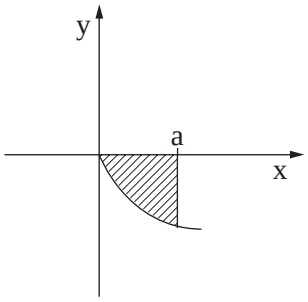
x	$x < -a$	$-a$	$-a < x < a$	a	$x > a$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	↗		↘		↗

ל־ $f'(x)$ יש מקסימום בנקודה שבה $x = -a$

ויש מינימום בנקודה שבה $x = a$

ד. על פי סעיף א(4): $f'(x)$ שלילית עבור $x > 0$ ו־ $f'(0) = 0$.

לכן השטח המבוקש S נמצא מתחת לציר ה־ x בגבולות שבין 0 ל־ a :



$$S = -\int_0^a f'(x)\,dx = -[f(x)]_0^a$$

$$S = \frac{1}{2a^2}$$

/המשך בעמוד 13/

שאלה 8

נתונה הפונקציה $f(x) = -\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\sin x$ בקטע $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$.

א. בקטע הנתון מצא:

(1) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.

(2) מצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים האי־שוויון $\frac{1}{2}\sin x > \sqrt{\sin x}$? נמק.

פתרון לשאלה 8

א. (1) עבור כל x בקטע הנתון: $\sin x \geq 0$ ($\sqrt{\sin x}$ מוגדר רק כאשר $\sin x \geq 0$)

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq x \leq \pi \quad \text{או} \quad 2\pi \leq x \leq 3\pi$$

(2) (עבור $2\pi < x < 3\pi$ או $0 < x < \pi$):

$$f'(x) = \frac{\cos x(\sqrt{\sin x} - 1)}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{\sin x} - 1 = 0 \quad \text{או} \quad \cos x = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5}{2}\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \quad \text{לא בתחום ההגדרה} \\ x = \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$f(x)$	0 ↘	$-\frac{1}{2}$	0 ↗		0 ↘	$-\frac{1}{2}$	0 ↗

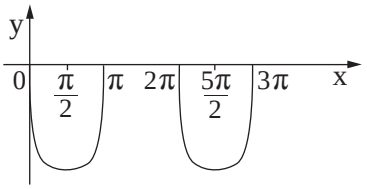
מקסימום בנקודות: $(0, 0)$ $(\pi, 0)$ $(2\pi, 0)$ $(3\pi, 0)$

מינימום בנקודות: $(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\frac{5\pi}{2}, -\frac{1}{2})$

/המשך בעמוד 14/

המשך פתרון לשאלה 8

ב. (1)



(2) $y = -\frac{1}{2}$ (ישר העובר דרך שתי נקודות המינימום)

ג. האי־שוויון $\frac{1}{2}\sin x > \sqrt{\sin x}$ שקול ל־ $f(x) > 0$.

לכן אין ערכים שעבורם מתקיים האי־שוויון $\frac{1}{2}\sin x > \sqrt{\sin x}$, כי $f(x) \le 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

/המשך בעמוד 15/

שאלה 9

מחלקים חוט שאורכו k לשני חלקים (לאו דווקא חלקים שווים) .

מחלק אחד של החוט יוצרים מעגל ומהחלק האחר יוצרים ריבוע.

סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי כאשר היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi+4}$.

מצא את הערך של k .

פתרון לשאלה 9

היקף המעגל: $x \quad (0 \le x \le k)$

היקף הריבוע: $k - x$

סכום השטחים: $S = \pi \cdot (\frac{x}{2\pi})^2 + (\frac{k-x}{4})^2$

$$\Downarrow$$

$$S' = \frac{x(\pi+4) - \pi k}{8\pi}$$

$$S' = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{I.} \quad x = \frac{\pi k}{\pi+4}$$

(הנקודה $\frac{\pi k}{\pi+4}$ נמצאת בקטע $[0 , k]$)

בדיקת מינימום: $S'' = \frac{\pi+4}{8\pi} > 0$

לפי הנתון: $\text{II.} \quad x = \frac{5\pi}{\pi+4}$

מ־ I ו־ II מקבלים: $k = 5$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	תשע"ב, **מועד ב**
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה"כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. רוכב אופנוע יצא מ־ A , ובאותה שעה יצא רוכב אופניים מ־ B . הם רכבו זה לקראת זה ונפגשו בדרך.

רוכב האופנוע הגיע ל־ B כעבור $\frac{1}{4}$ שעה מרגע הפגישה, ורוכב האופניים הגיע ל־ A כעבור 4 שעות מרגע הפגישה. (מהירויות הרוכבים היו קבועות.)

א. מצא את היחס בין המהירות של רוכב האופנוע למהירות של רוכב האופניים.

ב. נתון כי המרחק בין A ל־ B גדול מ־ 90 ק"מ.

מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות של כל אחד מהרוכבים.

(מהירות רוכב האופנוע אינה עולה על 120 קמ"ש.)

2. נתונה סדרה הנדסית $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$

א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים

$$a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n .$$

ב. נתון: $a_1^4 \cdot a_6^4 = 1{,}048{,}576$.

(1) חשב את גודל המכפלה $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot \dots \cdot a_6^2$.

(2) נתון גם כי $a_1 = 1$.

חשב את גודל המכפלה $a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot \dots \cdot a_7^2$.

הערה: אתה רשאי להשאיר בתשובתך חזקות.

/המשך בעמוד 3/

3. נערך סקר בקרב מספר גדול של סטודנטים (בנים ובנות).

חצי מהסטודנטים המשתתפים בסקר היו בנים.

בסקר נמצא כי מספר הבנות הסובלות מרעש גדול פי 3 ממספר הבנים הסובלים מרעש.

נמצא גם כי 5% מבין הבנים סובלים מרעש.

א. ידוע כי אחד המשתתפים בסקר שנבחר באקראי, סובל מרעש.

מהי ההסתברות שהנבחר הוא בת?

ב. בחרו באקראי 5 סטודנטים מבין משתתפי הסקר.

ידוע כי לכל היותר 2 מבין 5 הסטודנטים שנבחרו באקראי, סובלים מרעש.

מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם סובל מרעש?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

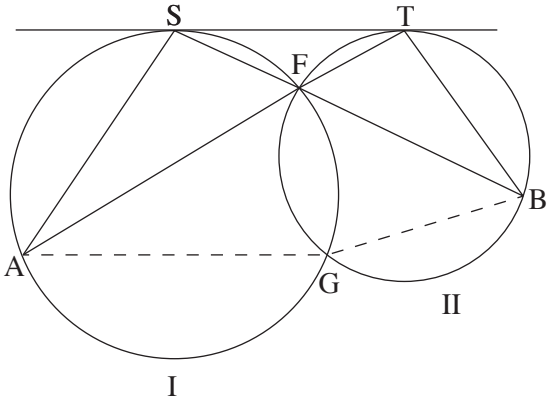
ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4. שני מעגלים I ו־ II נחתכים בנקודות G ו־ F.

הישר ST משיק למעגל I בנקודה S, ולמעגל II בנקודה T.

המשך SF חותך את מעגל II בנקודה B, והמשך TF חותך את מעגל I בנקודה A (ראה ציור).



א. הוכח כי $\frac{ST}{AS} = \frac{TB}{ST}$.

ב. (1) הוכח כי $\sphericalangle AGF = \sphericalangle SFA + \sphericalangle SAF$.

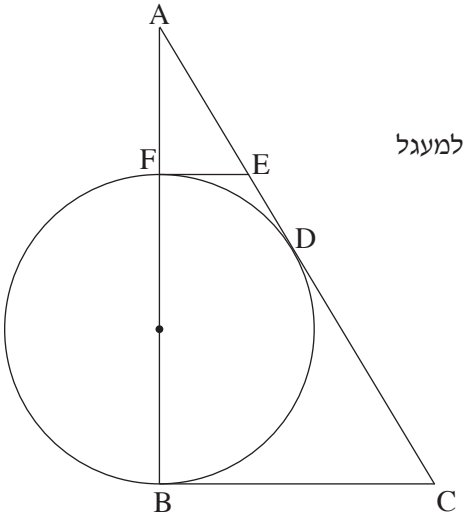
(2) הוכח כי אם הנקודות A, G ו־ B נמצאות על ישר אחד, אז $\sphericalangle SFA = 60^o$.

/המשך בעמוד 4/

.5 הצלעות CA ו־ CB של המשולש ABC משיקות למעגל בנקודות D ו־ B בהתאמה.

קוטר המעגל FB מונח על הצלע AB .

נקודה E נמצאת על הצלע AC כך ש־ EF משיק למעגל (ראה ציור).



א. האם המרובע FEDB הוא בר חסימה במעגל? נמק.

נתון: $EC =$ 15 ס"מ , $AE =$ 5 ס"מ .

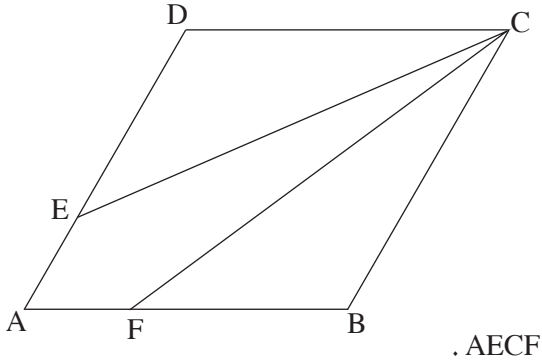
ב. הוכח כי $CB + EF = ED + CD$.

ג. חשב את האורך של EF . נמק.

ד. חשב את גודל הזוויות במשולש FDB .

.6 נתון מעוין ABCD . E ו־ F הן נקודות על הצלעות AD ו־ AB בהתאמה כך ש־ $AE = AF$ ו־ $FB = 2AF$.

נתון כי $\sphericalangle DCB = 60^o$.



א. מצא את גודל הזווית FCB .

ב. נתון כי אורך האלכסון AC הוא b .

הבע באמצעות b את היקף המרובע AECF .

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^3(3x - \pi)$, המוגדרת לכל x.

א. בתחום $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$ מצא:

(1) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) הוכח כי הפונקציה זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $-\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

ג. רשום את משוואות הישרים המשיקים לגרף הפונקציה בתחום $-\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$, ומאונכים לציר ה־ y.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$.

א. מצא:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

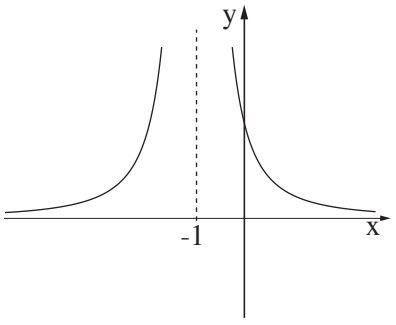
(4) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא את הסימן של האינטגרל המסוים $\int_k^t f'(x)\,dx$ $(k < t)$, אם נתון כי k ו־ t גדולים מ־ 3. נמק.

/המשך בעמוד 6/

9. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציית מנה המוגדרת עבור $x \neq -1$.



בציור מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות בלבד: $x = -1$, $y = 1$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ y בנקודה שבה $y = -1$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, על פי תשובתך לסעיף א ועל פי הנתונים שבסעיף ב.

ג. נתון גם $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

a , b , c ו־ d הם פרמטרים שונים מאפס.

(1) הבע באמצעות a את b , c ו־ d .

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי הצירים.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד ב קיץ תשע"ב (2012)

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

א. היחס הוא 4.
ב. מהירות רוכב האופנוע גדולה מ-72 קמ"ש וקטנה או שווה ל-120 קמ"ש.
מהירות רוכב האופניים גדולה מ-18 קמ"ש וקטנה או שווה ל-30 קמ"ש.

שאלה 2

א. הוכחה.
ב. (1) 2^{30}
(2) 2^{42}

שאלה 3

א. $\frac{3}{4}$.
ב. $\frac{45}{136}$.

שאלה 4

א. הוכחה .
ב. (1) הוכחה .
(2) הוכחה.
ג. הוכחה.

שאלה 5

א. לא .
ב. הוכחה.
ג. 3 ס"מ.
ד. $26.57°, 90°, 63.43°$.

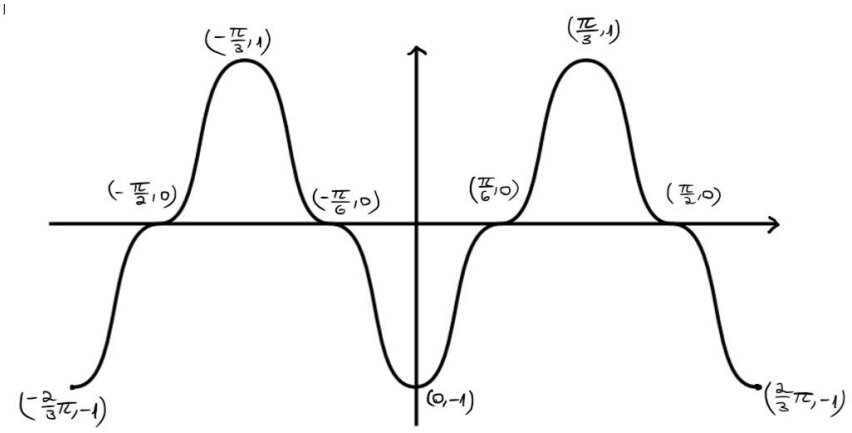
שאלה 6

א. $23.41°$.
ב. $2.063b$.

שאלה 7

א. (1) $(0,-1)$, $(\frac{\pi}{6},0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$.
(2) $(0,-1)$מינימום, $(\frac{\pi}{3},1)$ מקסימום, $(\frac{2\pi}{3},-1)$מינימום.
ב. (1) הוכחה

(2)



ג. $y = 0$, $y = -1$, $y = 1$.

<u>שאלה 8</u>

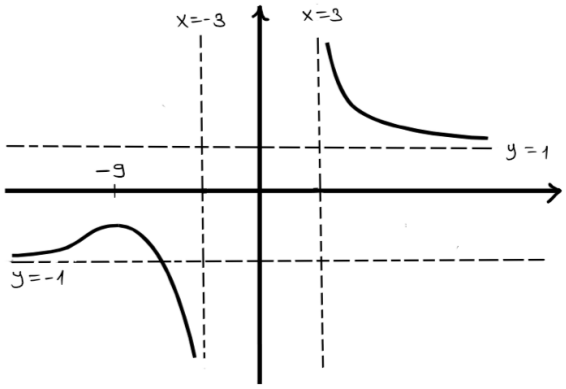
א. (1) $x > 3$ או $x < -3$.

(2) אין

(3) $x = 3$, $x = -3$, $y = -1$, $y = 1$.

(4) עליה: $x < -9$, ירידה: $x > 3$ או $-9 < x < -3$

ב.

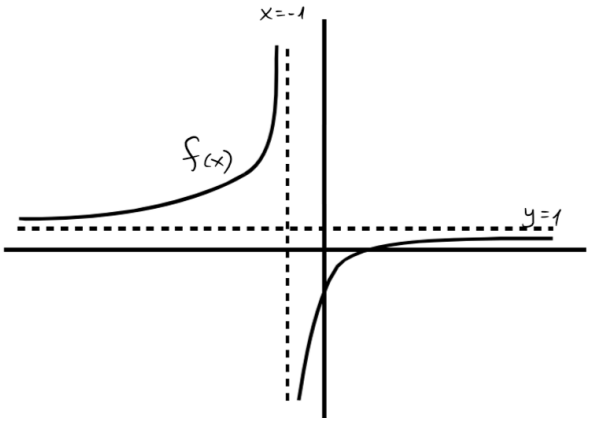


ג. הסימן הוא שלילי.

<u>שאלה 9</u>

א. תחום קעירות כלפי מעלה: $x < -1$, תחום קעירות כלפי מטה: $x > -1$.

ב.



ג. (1) $b = -a$, $c = a$, $d = a$.

(2) 1 .

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:	קיץ תשע"ב, 2012
מספר השאלון:	035806, 316
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה"כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. צינור הזרים לברֵכה 10 מ"ק מים בקצב קבוע. לאחר הפסקה של $\frac{1}{3}$ שעה הוגבר קצב ההזרמה של הצינור ב־ 3 מ"ק לשעה. בקצב המוגבר הזרים הצינור עוד 20 מ"ק מים.

הזמן שהצינור הזרים את המים, כולל ההפסקה, זהה לזמן שהיה נדרש לצינור, לו היה מזרים 30 מ"ק מים בלי הפסקה בקצב שלפני ההגברה.

א. חשב כמה זמן הזרים הצינור את המים עד ההפסקה.

ב. נתון גם כי הצינור ממלא $\frac{1}{3}$ מנפח ברֵכה ריקה ב־ 18 שעות, כאשר הוא מזרים מים בקצב שלפני ההגברה.

שני צינורות מזרימים יחד מים לברכה הריקה באותו קצב. קצב זה קטן מהקצב המוגבר של הצינור הנתון וגדול מהקצב שלפני ההגברה.

באיזה תחום שעות יהיה הזמן שבו שני הצינורות ימלאו את הברכה?

2. נתונה סדרה המוגדרת לפי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

ונתונה סדרה המוגדרת לפי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = b_n + 3 \end{cases}$$

א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{a_1 \cdot b_1} + \frac{1}{a_2 \cdot b_2} + \frac{1}{a_3 \cdot b_3} + \ldots + \frac{1}{a_n \cdot b_n} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

ב. הראה כי הסכום:

$$\frac{1}{a_{n+1} \cdot b_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2} \cdot b_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+3} \cdot b_{n+3}} + \ldots + \frac{1}{a_{2n} \cdot b_{2n}}$$

שווה ל־ $\frac{n}{a_{n+1} \cdot a_{2n+1}}$.

/המשך בעמוד 3/

3. א. מחלקים 2 כדורים לבנים וכדור 1 שחור בין שני כדים.

בכל כד חייב להיות לפחות כדור אחד.

בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו כדור אחד.

מצא באיזה אופן צריך לחלק את הכדורים בין שני הכדים, כדי שהסיכוי להוציא כדור לבן יהיה הגדול ביותר.

ב. בכד אחד יש 5 כדורים: 2 לבנים ו־ 3 שחורים.

(1) מוציאים באקראי 5 פעמים כדור מהכד עם החזרה (בכל פעם מחזירים לכד את הכדור שהוצא).

מהי ההסתברות להוציא בדיוק פעמיים כדור לבן?

(2) מוציאים באקראי 6 פעמים כדור מהכד עם החזרה.

מהי ההסתברות להוציא בדיוק 3 פעמים כדור לבן כך שהכדור הלבן השלישי יוצא בפעם השישית?

<u>הערה</u>: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (33$\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-4 (לכל שאלה — 16$\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

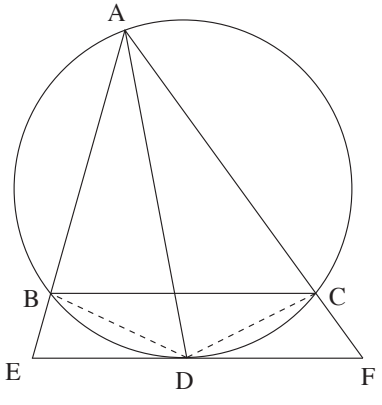
4. נתון כי במשולש AEF חוצה־זווית EAF הוא AD.

D היא נקודת ההשקה של הצלע EF

למעגל, החותך את הצלעות AE ו־ AF בנקודות B ו־ C בהתאמה.

המעגל עובר גם דרך קדקוד A (ראה ציור).

הוכח:

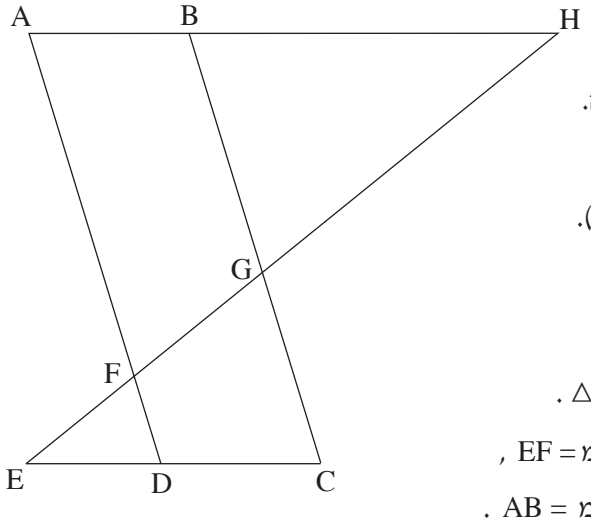


א. $BC \parallel EF$.

ב. $\triangle ABD \sim \triangle DCF$.

ג. $AD \cdot BD = DF \cdot AB$.

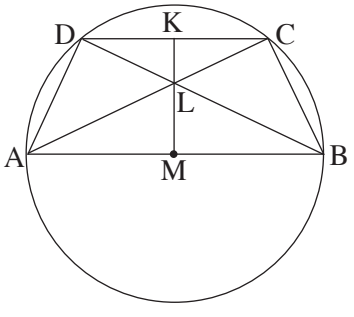
המשך בעמוד 4/



5. נתונה מקבילית $ABCD$.
E ו־H הן נקודות על
המשכי הצלעות CD ו־AB בהתאמה.
EH חותך את AD ואת BC
בנקודות F ו־G בהתאמה (ראה ציור).
נתון: $ED = EF$.

א. (1) הוכח כי $HG = HB$.
(2) הוכח כי $\triangle AGH \cong \triangle FBH$.

ב. נתון גם: $FD =$ 2 ס"מ, $EF =$ 3 ס"מ,
$BG =$ 7 ס"מ, $AB =$ 4 ס"מ.
(1) מצא את האורך של BH.
(2) מצא את היחס $\frac{AF}{GC}$.



6. טרפז שווה־שוקיים $ABCD$ $(DC \parallel AB)$
חסום במעגל שמרכזו M.
הבסיס AB הוא קוטר במעגל זה.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה L.
המשך ML חותך את DC בנקודה K (ראה ציור).
נתון כי $\sphericalangle BAD = \alpha$.
הבע באמצעות α את היחס $\frac{KL}{LM}$.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. א. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה רציונלית המקיימת:

- לפונקציה יש שלוש אסימפטוטות: $x = 4$, $x = -1$, $y = 0$
- הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq -1$ ו־ $x \neq 4$
- $f(0) > 0$
- $f(1.5) = 0$
- $f'(x) < 0$ רק עבור $-1 < x < 4$
- $f(x) < 0$ עבור $x > 4$ ו־ $f(x) > 0$ עבור $x < -1$

(1) על פי הנתונים שבסעיף זה, סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) על פי הגרף שסרטטת, הראה כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון בתחום $-1 < x < 4$, וקבע את סוגה. נמק.

אין צורך למצוא את השיעורים של נקודת הקיצון.

ב. נתון גם כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(x) = \dfrac{3a - 3bx}{(x^2 - ax - 4)^2}$.

a ו־ b הם פרמטרים.

מצא את הפונקציה $f(x)$.

/המשך בעמוד 6/

8. נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

בתחום הנתון:

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. (1) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)$.

הראה כי $g'(x) = f(x)$.

(2) בתחום הנתון מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

9. ישר משיק לפרבולה $y = x^2$ בנקודה שבה $0 < x < 1$.

המשיק יוצר משולש עם ציר ה־ x ועם הישר $x = 1$.

מצא את השטח המקסימלי של המשולש הנוצר באופן שתואר.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד ב קיץ תשע"ב (2012)

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

א. 50 דקות או $\frac{5}{6}$ שעה.
ב. בין 21.6 שעות ל-27 שעות.

שאלה 2

א. הוכחה.
ב. הוכחה.

שאלה 3

א. כד א': 1 לבן , כד ב': 1 לבן ו-1 שחור.
ב. (1) $\frac{216}{625}$.
(2) $\frac{432}{3125}$.

שאלה 4

א. הוכחה .
ב. הוכחה .
ג. הוכחה.

שאלה 5

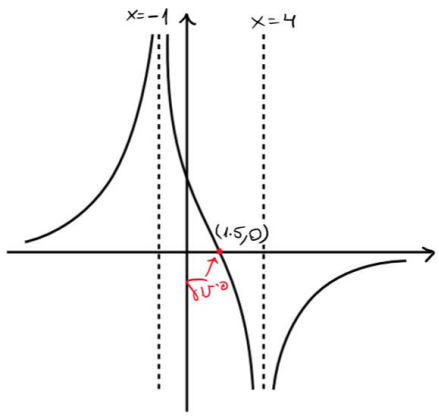
א. (1) הוכחה .
(2) הוכחה .
ב. (1) 10.5 ס"מ .
(2) $\frac{29}{14}$.

שאלה 6

$-cos(2\alpha)$.

שאלה 7

א. (1)



(2) קיימת נקודת קיצון מסוג מקסימום.

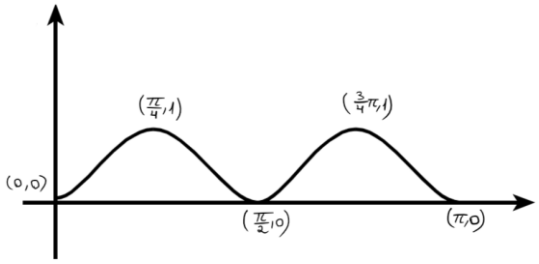
ב. $f(x)=\frac{9-6x}{(x^2-3x-4)^2}$

<u>שאלה 8</u>

א. $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\pi,0)$.

ב. $(0,0)$מינימום, $(\frac{\pi}{4},1)$ מקסימום, $(\frac{\pi}{2},0)$ מינימום, $(\frac{3\pi}{4},1)$ מקסימום, $(\pi,0)$ מינימום .

ג.



ד. (1) הוכחה.

(2) $\frac{\pi}{2}$.

<u>שאלה 9</u>

$\frac{8}{27}$.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות לבתי ספר על־יסודיים
מועד הבחינה:	חורף תשע״ב, 2012
מספר השאלון:	035806
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תכנית ניסוי

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	— $16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	— $16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	— $16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
			סה״כ	— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. משאית יצאה מעיר A לעיר B . בדיוק באותו רגע יצאה מכונית מעיר B לעיר A .
כאשר הגיעה המכונית ל־ A היא חזרה מיד ל־ B , וכאשר הגיעה ל־ B היא מיד שוב יצאה ל־ A .
המכונית פגשה בדרכה את המשאית שלוש פעמים, לפני שהמשאית הגיעה ל־ B .
הפגישה הראשונה הייתה כעבור 2 שעות מרגע היציאה של המכונית והמשאית לדרך.
הפגישה השנייה הייתה כעבור $4\frac{2}{3}$ שעות מרגע היציאה.
הפגישה השלישית הייתה במרחק 40 ק"מ מ־ B .
מצא את המהירות של המשאית. (המהירויות של המשאית והמכונית אינן משתנות.)

2. א. נתונה סדרה חשבונית שבה $a_1 = 1$ ו־ $d = 2$.
S_n הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה.
הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ב. נתונה סדרה המקיימת לכל n טבעי:

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{b_n - 1}$$

$$b_{19} + b_{20} = 4.5 \quad , \quad b_{19} > 2$$

$$b_{n+2} = b_n$$

מצא את b_{10} .

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

/המשך בעמוד 3/

3. חברה מייצרת טלפונים ניידים חדשניים עם "מסך תלת־ממד". כדי לבדוק את הביקוש לטלפונים אלה, ערכה החברה סקר טלפוני. בסקר השתתפו צעירים ומבוגרים.

חלק מהמשתתפים בסקר הצהירו שלא יקנו את הטלפון החדשני והשאר הצהירו שיקנו אותו.

נמצא כי 50% מהמבוגרים הצהירו כי יקנו את הטלפון החדשני.

$\frac{2}{3}$ מבין אלה שהצהירו כי לא יקנו את הטלפון החדשני, היו צעירים.

$\frac{1}{5}$ מהמשתתפים בסקר היו צעירים שגם טענו כי לא יקנו את הטלפון החדשני.

א. בסקר השתתפו 2000 איש.

כמה צעירים השתתפו בסקר?

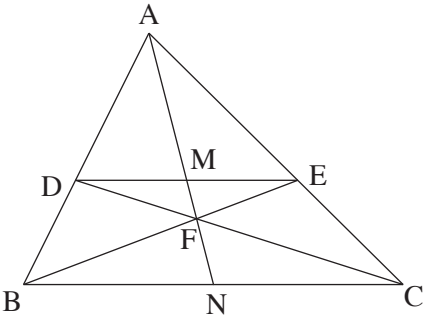
ב. כמה צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו את הטלפון החדשני?

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



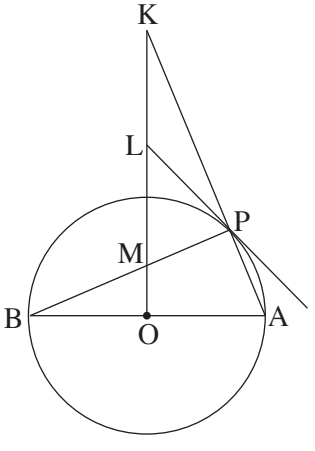
4. במשולש ABC הנקודות D ו־E נמצאות על הצלעות AB ו־AC בהתאמה כך ש־ $DE \parallel BC$.
CD ו־BE נחתכים בנקודה F .
AF חותך את DE בנקודה M ,
והמשכו חותך את BC בנקודה N (ראה ציור).

הוכח:

א. $\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$.

ב. $\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}$.

ג. $DM = EM$ ו־ $BN = CN$.



5. BA הוא קוטר במעגל שמרכזו O .
דרך O העבירו אנך ל־BA .
המשיק למעגל בנקודה P חותך את האנך בנקודה L .
המשך המיתר AP חותך את האנך בנקודה K ,
והמיתר BP חותך את האנך בנקודה M
(ראה ציור).

א. הוכח כי $KL = LM$.

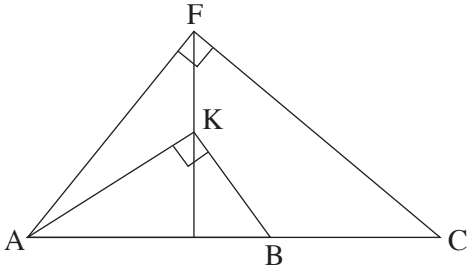
ב. נתון: $BP =$ 24 ס"מ

רדיוס המעגל הוא 13 ס"מ

המשיק למעגל בנקודה P חותך את המשך הקוטר BA בנקודה F .

מצא את אורך הקטע AF .

/המשך בעמוד 5/



.6 במשולש ישר־זווית AFC $(\sphericalangle AFC = 90^o)$

הנקודה K נמצאת על הגובה ליתר

כך ש־ $\sphericalangle FAK = \beta$ ו־ $\sphericalangle KAC = \alpha$.

B היא נקודה על היתר AC

כך ש־ $\sphericalangle AKB = 90^o$ (ראה ציור).

רדיוס המעגל החוסם את המשולש AFC הוא R ,

ורדיוס המעגל החוסם את המשולש AKB הוא r .

א. (1) הבע באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{AF}{AK}$.

(2) הבע באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{R}{r}$.

ב. הבע באמצעות R ו־ r בלבד את רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKF .

/המשך בעמוד 6/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x} - 2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$.

הנגזרת של $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

מצא את תחום הירידה של הפונקציה $g(x)$. נמק.

/המשך בעמוד 7/

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-a \cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x + 9}}$ בתחום $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 0 . הפונקציה מוגדרת לכל x בתחום הנתון.

א. בתחום הנתון מצא עבור אילו ערכי x :

(1) $f(x) > 0$. נמק.

(2) $f(x) < 0$. נמק.

ב. מצא את ערך האינטגרל $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\,dx$.

ג. נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = -\frac{\pi}{6}$ ו־ $x = \frac{7\pi}{6}$, שווה ל־ 8 .

מצא את הערך של a .

9. CD הוא קוטר במעגל שרדיוסו R .

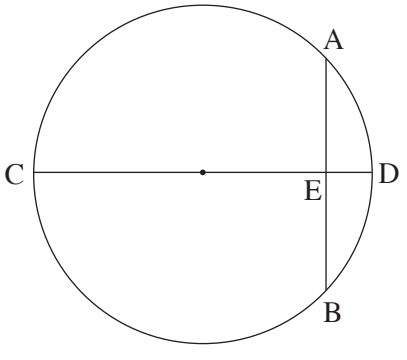
AB הוא מיתר במעגל המאונך לקוטר CD

וחותך אותו בנקודה E

כך ש־ $CE > R$ (ראה ציור).

הבע באמצעות R את השטח המקסימלי

של המשולש ABC .



בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

פתרונות לבחינת בגרות במתמטיקה, 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון, מס 035581, מועד חורף תשע"ב (2012)

יש לענות על שתיים מן השאלות 1-3.

יש לענות על אחת מן השאלות 4-5.

יש לענות על שתיים מן השאלות 6-8.

שאלה 1

40 קמ"ש.

שאלה 2

א. הוכחה.
ב. $b_{10} = 1.5$.

שאלה 3

א. 1600 צעירים השתתפו בסקר.
ב. 1200 צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו את הטלפון החדשני.

שאלה 4

א. הוכחה .
ב. הוכחה .
ג. הוכחה.

שאלה 5

א. הוכחה .
ב. 5.462 ס"מ .

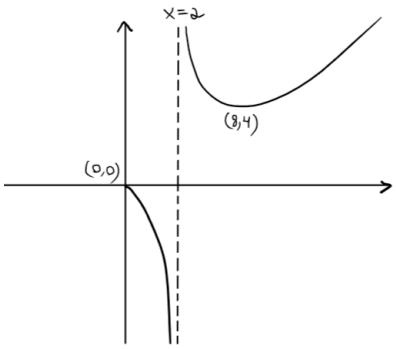
שאלה 6

א. (1) $\frac{AF}{AK} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$
(2) $\frac{R}{r} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)}$
ב. $\sqrt{R} \cdot \sqrt{r}$

שאלה 7

א. (1) תחום ההגדרה הוא : $x \neq 2$, $x \geq 0$.
(2) אסימפטוטה אנכית : $x = 2$. אין אסיפטוטה אופקית.
(3) $(0,0)$.
(4) $(0,0)$ מקסימום קצה, $(8,4)$ מינימום.

(5)



ב. $2 < x < 8$

<u>שאלה 8</u>

א. (1) $f(x) > 0$ עבור $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{6}$

(2) $f(x) < 0$ עבור $-\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2}$

ב. 0.

ג. $a = 0.5$.

<u>שאלה 9</u>

$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות לבתי ספר על־יסודיים
מועד הבחינה:	תשע״א, **מועד ב**
מספר השאלון:	035806
נספח:	דפי נוסחאות ל־ 5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תכנית ניסוי

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
			סה״כ		—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. רוכב אופניים יצא ממושב A אל מושב B , ולאחר $\frac{1}{2}$ שעה יצא רוכב אופניים שני ממושב B אל מושב A .
הרוכבים נפגשו לאחר שהרוכב השני עבר $\frac{1}{4}$ מהמרחק שבין B ל- A .
ביום אחר יצא רוכב האופניים הראשון ממושב A למושב B $\frac{1}{2}$ שעה אחרי שרוכב האופניים השני יצא ממושב B אל מושב A . הרוכבים נפגשו באמצע הדרך שבין A ל- B.
מהירויות הרוכבים לא השתנו.
   א. חשב את היחס בין מהירות הרוכב הראשון ובין מהירות הרוכב השני.
   ב. ידוע שאם שני הרוכבים יוצאים באותו רגע זה לקראת זה, הם נפגשים במרחק b ק"מ מאמצע הדרך שבין A ל- B .
   הבע באמצעות b את הדרך שבין A ל- B .

2. א. היעזר בנוסחה לסכום של סדרה חשבונית, והוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים: $(1+2+3+...+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+...+n^3$
   ב. נתונה המשוואה $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = 5,832,225$
   n הוא מספר טבעי.
   מצא כמה מחוברים יש באגף השמאלי של המשוואה.

/המשך בעמוד 3/

3. בקבוצה של 40 אנשים יש 16 גברים והשאר נשים.

ל- 12 גברים בקבוצה יש רישיון נהיגה, ול- 16 נשים בקבוצה יש רישיון נהיגה.

א. בוחרים באקראי אדם מהקבוצה.

מהי ההסתברות שייבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה?

ב. בוחרים באקראי אדם מהקבוצה. לאחר שהאדם חוזר לקבוצה, שוב בוחרים באקראי אדם מהקבוצה.

מהי ההסתברות שלפחות פעם אחת ייבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה?

ג. האם המאורע "לבחור מהקבוצה גבר" והמאורע "לבחור מהקבוצה אדם שיש לו רישיון נהיגה" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ד. לכמה נשים בקבוצה צריך שיהיה רישיון נהיגה כדי לקבוע שבקבוצה הנתונה רישיון נהיגה אינו תלוי במין האדם? (מספר הגברים והנשים בקבוצה אינו משתנה, ומספר הגברים בעלי רישיון אינו משתנה.)

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

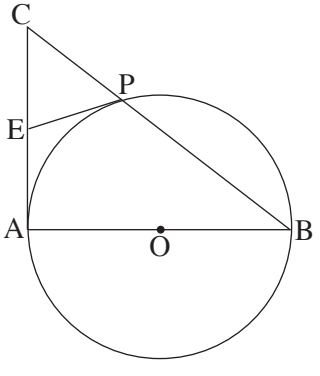
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4. במשולש ישר-זווית CAB ($\sphericalangle CAB = 90^o$)

הניצב AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O .

היתר BC חותך את המעגל גם בנקודה P .

המשיק למעגל בנקודה P חותך את הניצב CA בנקודה E (ראה ציור).



א. הוכח כי $CE = EA$.

ב. אם נתון כי $\frac{CP}{EA} = \frac{2}{3}$,

וכי שטח המשולש CPE הוא 2 סמ"ר,

מצא את שטח המשולש PAB . נמק.

/המשך בעמוד 4/

.5 במשולש ישר־זווית ABC ($\sphericalangle ACB = 90^o$)

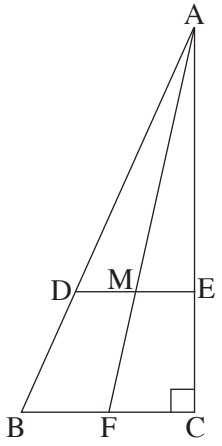
AF הוא תיכון לצלע BC .

התיכונים במשולש נפגשים בנקודה M .

דרך הנקודה M העבירו ישר המקביל לצלע BC ,

וחותך את הצלעות AB ו־ AC בנקודות D ו־ E

בהתאמה (ראה ציור).



א. חשב את היחס $\frac{DE}{BC}$. נמק.

ב. ידוע כי DC הוא חוצה־זווית ACB .

חשב את גודל הזוויות החדות במשולש ABC .

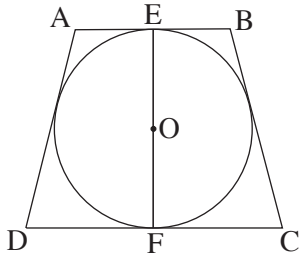
.6 נתון טרפז שווה־שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$)

החוסם מעגל שמרכזו O .

AB ו־ DC משיקים למעגל

בנקודות E ו־ F בהתאמה.

EF הוא קוטר במעגל (ראה ציור).



האורך של שוק הטרפז הוא b .

נתון כי $(\sin\sphericalangle C)^2 = \sin(90^o - \sphericalangle C)$.

הבע באמצעות b :

א. את רדיוס המעגל החסום בטרפז.

ב. את אורך הבסיס הקטן AB .

בתשובותיך השאר שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

א. מצא אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית.
נמק.

ב. בתחום $0 \le x \le 2\pi$:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. ציין ערכים על ציר ה־ x .

ג. לסרטוט שסרטטת בתת־סעיף ב (3) הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-2\pi \le x \le 0$. ציין ערכים על ציר ה־ x .

ד. השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הישר $y = 2$, על ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, על ידי ציר ה־x ועל ידי ציר ה־y , מסתובב סביב ציר ה־x .
מצא את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר.

ה. בתחום שבין ∞ ל־ $-\infty$, רשום בצורה כללית את השיעורים:

(1) של נקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$.

(2) של נקודות המקסימום של הפונקציה $f(x)$.

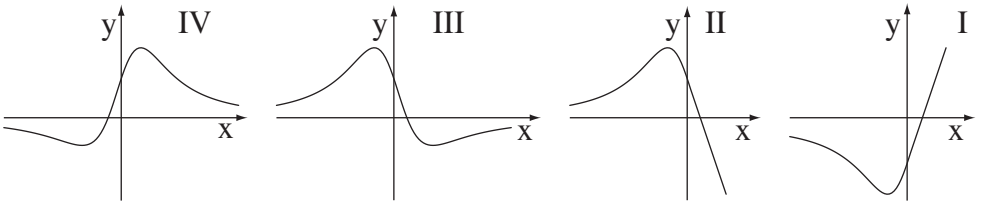
/המשך בעמוד 6/

8. נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x) = \dfrac{-6x^2-3x+3}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. מבין הגרפים I , II , III , IV שלפניך, איזה גרף מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

נמק.



ב. (1) מצא תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$ ותחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) היעזר בגרף של $f'(x)$ שבסעיף א, ומצא בין אילו שני מספרים שלמים עוקבים נמצא שיעור ה־x של נקודת הקיצון של $f(x)$. נמק.

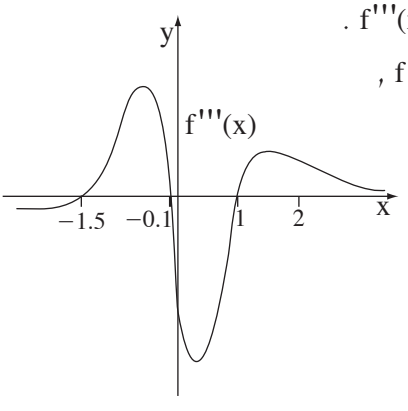
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי הגרף חותך את ציר ה־x רק בנקודה אחת שבה $x = 3$.

לפניך סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השלישית $f'''(x)$.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'''(x)$,

על ידי ציר ה־x וציר ה־y

ועל ידי הישר $x = 2$ בתחום $x \geq 0$.



/המשך בעמוד 7/

9. נתונות משוואות של שתי פרבולות: $f(x) = -a^2x^2$

$g(x) = x^2 - x$

a הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

הפרבולות נפגשות בנקודות O ו־ A (O — ראשית הצירים).

א. הבע באמצעות a את השיעורים של הנקודה A .

ב. מצא את השיעורים של הנקודה A שעבורה השטח, המוגבל על ידי הגרף של f(x) , על ידי ציר ה־ x ועל ידי האנך לציר ה־ x העובר דרך הנקודה A , הוא מקסימלי.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות לבתי ספר על־יסודיים
מועד הבחינה:	קיץ תשע״א, 2011
מספר השאלון:	035806
נספח:	דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תכנית ניסוי

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	— $33\frac{1}{3}$ נקודות
			סה״כ		— 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. במפעל לייצור מחשבונים עובדים פועלים ותיקים ופועלים חדשים.
פועל ותיק ופועל חדש התבקשו להרכיב מחשבונים.
לו פועל ותיק היה עובד $\frac{1}{3}$ מהזמן שנדרש לעובד חדש לבצע לבד עבודה זו,
ופועל חדש היה עובד $\frac{1}{3}$ מהזמן שנדרש לעובד ותיק לבצע לבד עבודה זו,
אז יחד הם היו מבצעים $\frac{13}{18}$ מעבודה זו.
פועל ותיק מבצע לבד את העבודה במספר שעות קטן יותר מזה הדרוש לפועל חדש.
   א. מצא פי כמה גדול מספר השעות הדרוש לפועל חדש לבצע לבד את העבודה,
   ממספר השעות הדרוש לפועל ותיק לבצע לבד את העבודה.
   ב. נתון כי פועל ותיק מרכיב 9 מחשבונים בשעה.
   בצוות עבודה יש פועל אחד חדש ושני פועלים ותיקים.
   מצא בכמה שעות הצוות מרכיב 168 מחשבונים.

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת.
כל איבר בסדרה זו קטן פי 2 מסכום כל האיברים שאחריו.
סכום הסדרה ההנדסית הנתונה הוא 4 .
מצא את סכום כל האיברים שאחרי האיבר העשירי בסדרה.

/המשך בעמוד 3/

3. בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות. נמצא כי מספר הלקוחות שצופים בערוצי אקטואליה גדול פי 4 ממספר הלקוחות שאינם צופים בהם.

$\frac{5}{6}$ מהלקוחות שצופים בערוצי סרטים, צופים בערוצי אקטואליה.

75% מהלקוחות שאינם צופים בערוצי סרטים, צופים בערוצי אקטואליה.

בוחרים באקראי לקוח מבין הלקוחות שהרגלי הצפייה שלהם נבדקו.

ההסתברות שהוא צופה בערוצי סרטים היא P .

א. (1) הבע באמצעות P את ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה בערוצי סרטים וגם בערוצי אקטואליה.

(2) מצא את P .

ב. (1) נמצא שהלקוח שנבחר אינו צופה בערוצי סרטים.

מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי אקטואליה?

(2) מבין הלקוחות שאינם צופים בערוצי סרטים בחרו באקראי 5 לקוחות.

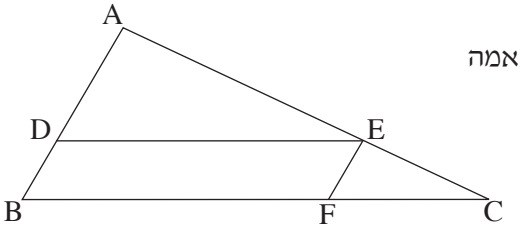
מהי ההסתברות שלפחות 1 מהם צופה בערוצי אקטואליה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 4-6 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4. נתון משולש ABC . הנקודות D, E ו־ F נמצאות על הצלעות AB , AC ו־ BC בהתאמה כך ש־ $DE \parallel BC$ ו־ $FE \parallel BA$ (ראה ציור).

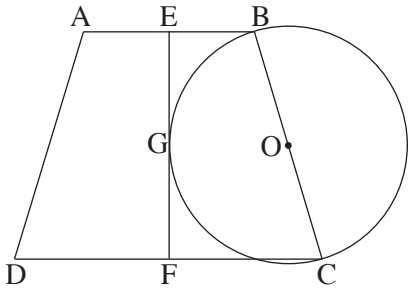


א. נתון: שטח המשולש ADE הוא S_1 , שטח המשולש EFC הוא S_2 .

הבע באמצעות S_1 ו־ S_2 את היחס $\frac{BF}{FC}$. נמק.

ב. הוכח כי שטח המשולש BEF שווה ל־ $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

/המשך בעמוד 4/

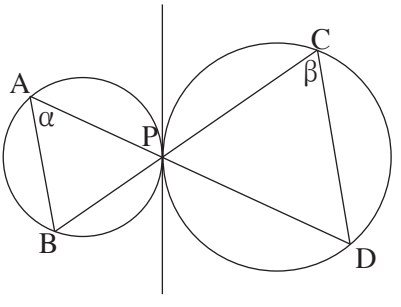


5. נתון טרפז שווה־שוקיים ABCD
($AB \parallel CD$, $AB < CD$) .
הנקודות E ו־ F הן אמצעי הצלעות AB
ו־ CD בהתאמה (ראה ציור).

א. הוכח כי EF מאונך ל־ CD .

ב. על BC כקוטר בנו מעגל שמרכזו O .
נתון כי EF משיק למעגל בנקודה G (ראה ציור).
הוכח: $EB + FC = 2GO$.

ג. נתון: $\sphericalangle GCB = \alpha$, $BC = 2R$. R — רדיוס המעגל.
הבע את גובה הטרפז ABCD באמצעות α ו־ R .



6. לשני מעגלים יש משיק משותף
המשיק לשניהם בנקודה P .
נקודות C ו־ D נמצאות על מעגל אחד
ונקודות A ו־ B נמצאות על המעגל האחר
כך שהקטעים AD ו־ CB נפגשים בנקודה P
(ראה ציור).

נתון: רדיוס המעגל העובר דרך הנקודות C , D ו־ P הוא 4.5 ס"מ,
$\frac{CD}{AB} = \frac{3}{2}$, $\sphericalangle BAP = \alpha$, $\sphericalangle DCP = \beta$.

א. מצא את רדיוס המעגל העובר דרך הנקודות A , B ו־ P .

ב. הבע באמצעות α ו־ β את אורך הקטע BD .

ג. אם נתון גם כי $\frac{PD}{PB} = \frac{3}{2}$, הראה כי $BD = 3\sin\alpha \cdot \sqrt{1 + 24\sin^2\alpha}$.
(α ו־ β הן זוויות חדות.)

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. a הוא פרמטר שונה מאפס.

א. עבור $a > 0$ מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(3) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

(4) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a > 0$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - a$, $a > 0$.

(1) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$? (הבע באמצעות a במידת הצורך.)

(2) מה הם הערכים שהפונקציה $g(x)$ יכולה לקבל?

(הבע באמצעות a במידת הצורך.)

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$ בתחום $-0.5 \le x \le 2.5$.

א. בתחום הנתון מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

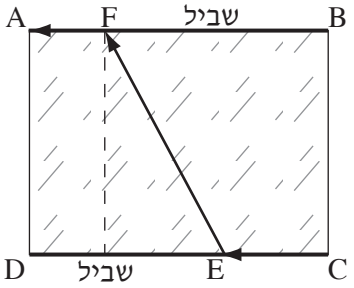
ב. בתחום הנתון סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בתחום $0 \le x \le 2$ מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

תוכל להיעזר בסקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

בתשובותיך דייק במידת הצורך עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

/המשך בעמוד 6/



9. נתונה מדשאה בצורת מלבן ABCD .

לאורך צלעות המלבן BA ו־ CD יש שבילי הליכה.

אורך הצלע BA הוא 0.4 ק"מ ,

ואורך הצלע BC הוא 0.3 ק"מ.

אדם עומד בקדקוד C של המדשאה ורוצה להגיע לקדקוד A . הוא הולך לאורך הקטע CE שעל השביל CD , אחר כך הולך לאורך הקטע EF שעל המדשאה וממשיך לאורך הקטע FA שעל השביל BA (ראה ציור).

האדם הולך במהירות של 6 קמ"ש לאורך השבילים,

ועל המדשאה הוא הולך במהירות של 4 קמ"ש.

מה צריך להיות אורך הקטע EF , כדי שהאדם יגיע ל־ A בזמן הקצר ביותר?

בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות לבתי ספר על־יסודיים
מועד הבחינה:	חורף תשע״א, 2011
מספר השאלון:	035806
נספח:	דפי נוסחאות ל־4 ול־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תכנית ניסוי

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
			סה״כ		—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. נהג יצא מעיר A לכיוון עיר B . המרחק בין שתי הערים הוא 120 ק"מ.
בהתחלה נסע הנהג במהירות קבועה כפי שתכנן, אבל כעבור $\frac{3}{4}$ שעה מתחילת נסיעתו הייתה תקלה ברכבו.
הנהג חזר מיד לכיוון A , ונסע 10 ק"מ במהירות של 50 קמ"ש עד למוסך הנמצא בדרך ל- A.
המוסך טיפל בתקלה במשך 33 דקות, ומיד לאחר הטיפול יצא הנהג לכיוון B במהירות הקטנה ב- 10 קמ"ש ממהירות נסיעתו עד התקלה.
הוא הגיע ל- B באיחור של שעה אחת לעומת השעה המתוכננת.
מה הייתה מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה?

2. א. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2\cdot 4+5\cdot 4^2+8\cdot 4^3+11\cdot 4^4+\ldots+(6n-1)\cdot 4^{2n}=\frac{(6n-2)\cdot 4^{2n+1}+8}{3}$$

ב. הראה כיצד אפשר לחשב על סמך סעיף א את הסכום

$2\cdot 4+5\cdot 16+8\cdot 64+\ldots+26\cdot 262{,}144$, וחשב אותו.

/המשך בעמוד 3/

3. משפחה יצאה לטיול במכונית הנוסעת על 4 גלגלים חדשים.

בתא המטען של המכונית יש גלגל רזרבי אחד.

ההסתברות שיהיה נקר (פנצ'ר) בגלגל חדש בזמן הטיול היא 0.05 .

ההסתברות שיהיה נקר בגלגל הרזרבי בזמן הטיול היא 0.25 .

א. מהי ההסתברות שיהיה נקר בדיוק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים החדשים?

ב. בתחילת הטיול היה נקר בגלגל אחד, והמשפחה החליפה את הגלגל בגלגל הרזרבי.

(1) מהי ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל הרזרבי מבין ארבעת הגלגלים?

(2) מהי ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים?

(3) ידוע כי אחרי ההחלפה היה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים. מהי ההסתברות שהנקר היה בגלגל הרזרבי?

<u>נוסחאות בהסתברות מותנית</u>

פרופורציה מותנית והסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

יש תלות: $P(A/B) \neq P(A/\bar{B})$

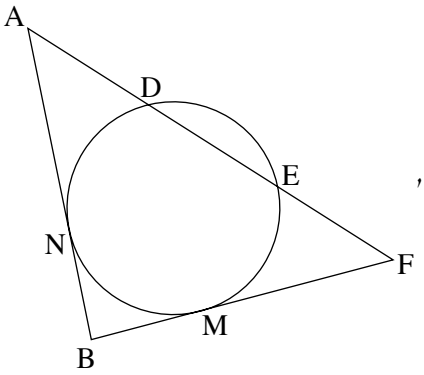
$P(A/B) \neq P(A)$

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



4. מנקודה A יוצאים למעגל חותך AF וישר המשיק למעגל בנקודה N. החותך נפגש עם המעגל בנקודות D ו־E. מנקודה F יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה M, ונפגש עם המשך המשיק AN בנקודה B (ראה ציור).

נתון: $AD = DE = EF$.

הוכח:

א. $AN = MF$.

ב. $\triangle ADN \cong \triangle FEM$.

ג. במרובע $MNDE$ יש שתי צלעות מקבילות זו לזו.

/המשך בעמוד 5/

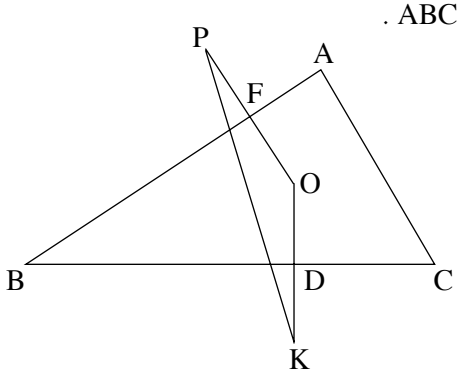
5. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

המעגל משיק לצלע BC בנקודה D

ולצלע AB בנקודה F .

המשיכו את OD עד K ואת OF עד P

כך ש־ $OD = DK$ ו־ $OF = FP$.



א. הוכח כי $FD \perp BO$.

ב. הוכח כי $BO \perp PK$.

ג. נסמן: רדיוס המעגל החסום הוא r ,

$\sphericalangle ABC = 2\beta$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$.

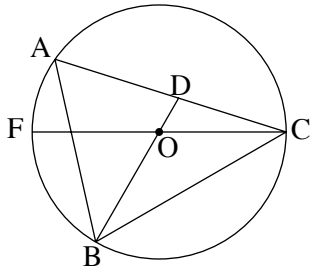
הבע באמצעות α , β ו־ r את שטח המשולש BOC .

6. משולש חד־זוויות ABC חסום במעגל שמרכזו O .

CF הוא קוטר במעגל, והמשך הרדיוס

BO חותך את הצלע AC בנקודה D ,

כמתואר בציור.



נתון: $\sphericalangle ABD = \alpha$

הקשת $\overset{\frown}{BC}$ ארוכה פי 2 מהקשת $\overset{\frown}{FB}$

א. חשב את גודל הזווית BAC .

ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש BAD לשטח המשולש BAC .

ג. נתון גם כי $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$.

מצא את α .

/המשך בעמוד 6/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^2 + 3a} - 1$.

a הוא פרמטר , $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

(3) את שיעורי ה־x של נקודות הפיתול של הפונקציה. נמק.

(4) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הסבר את השינויים בגרף הפונקציה $f(x)$ עבור $a < 0$ לעומת גרף הפונקציה עבור $a > 0$:

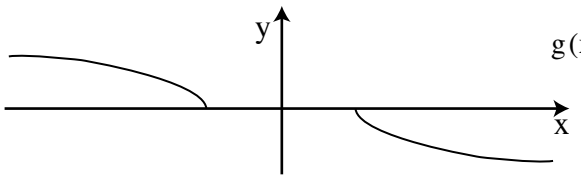
(1) בתחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) בנקודות הפיתול של הפונקציה.

/המשך בעמוד 7/

8. נתונות הפונקציות: $f(x) = \sqrt{-x-4}$

$g(x) = -\sqrt{x-4}$



(ראה ציור) .

א. מצא את תחום ההגדרה של

כל אחת מהפונקציות הנתונות.

לפונקציות יש משיק משותף, המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = x_o$.

ב. (1) הבע באמצעות x_o את השיעורים של הנקודה שבה המשיק המשותף משיק

לגרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה שהבעת בתת־סעיף ב (1) (ערכים מספריים).

ג. השטח המוגבל על ידי המשיק המשותף, על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$

ועל ידי ציר ה־ x , מסתובב סביב ציר ה־ x .

מצא את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\tan^2 x$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

א. בתחום הנתון:

(1) מצא את ערכי ה־ x שעבורם הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצא את פונקציית הנגזרת של הפונקציה $g(x) = \tan x - x$.

(2) בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ מצא את השטח המוגבל על ידי הישר $y = \frac{2}{3}$,

על ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

היעזר בפונקציית הנגזרת של $g(x)$.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות לבתי ספר על־יסודיים
מועד הבחינה:	תש״ע, **מועד ב**
מספר השאלון:	035806
נספח:	דפי נוסחאות ל־4 ול־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

<u>תכנית ניסוי</u>

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה״כ	—	100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, <u>גם</u> כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את <u>כל</u> פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

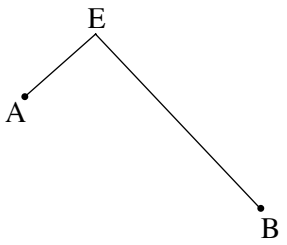
השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



1. רוכב אופניים רכב מעיר A לעיר B .
במסלול שבין שתי הערים יש תחילה עלייה
ואחר כך ירידה (ראה ציור).
מהירות הרוכב בירידה היא קבועה, וגדולה ב־ 10 קמ״ש
ממהירותו בעלייה.
הרוכב עבר את הדרך מ־ A ל־ B ב־ 4.5 שעות, ואת הדרך מ־ B ל־ A עבר ב־ 6 שעות.
מהירות הרוכב בעלייה שבדרך מ־ A ל־ B שווה למהירות הרוכב בעלייה
שבדרך מ־ B ל־ A , וגם מהירות הרוכב בירידה בכל אחת מהדרכים היא אותה מהירות.
אורך המסלול בין שתי הערים הוא 70 ק״מ.
א. מצא את מהירות הרוכב בעלייה.
ב. מצא את אורך המסלול מ־ E ל־ B .

2. a_n ו־ a_k הם שני איברים בסדרה חשבונית במקום ה־ n ובמקום ה־ k בהתאמה.
הפרש הסדרה הוא d , והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1 = md$,
m — מספר טבעי, $d \neq 0$.
א. (1) הראה כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$
(2) הבע באמצעות n , k ו־ m את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של
שני האיברים a_n ו־ a_k .
ב. (1) הבע באמצעות a_1 , d ו־ m את הסכום $a_{34} + a_{65}$.
(2) נתון: $a_{34} + a_{65} = a_{109}$,
סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .
מצא את d ואת a_1 .

/המשך בעמוד 3/

3. ברשותנו שתי קוביות משחק הנראות זהות. קובייה אחת מאוזנת והאחרת לא־מאוזנת.
בהטלת הקובייה המאוזנת ההסתברות לקבל אחד מהמספרים הרשומים על פאות הקובייה היא אותה הסתברות עבור כל אחד מהמספרים.
בהטלת הקובייה הלא־מאוזנת ההסתברות לקבל את המספר שש היא $\frac{1}{3}$.

א. (1) זורקים 3 פעמים את הקובייה המאוזנת.
מהי ההסתברות לקבל בדיוק 2 פעמים את המספר שש?
(2) זורקים 3 פעמים את הקובייה הלא־מאוזנת.
מהי ההסתברות לקבל בדיוק 2 פעמים את המספר שש?

ב. בוחרים באקראי אחת משתי הקוביות, וזורקים 3 פעמים את הקובייה שבוחרים.
(1) מהי ההסתברות לקבל בדיוק 2 פעמים את המספר שש?
(2) ידוע כי המספר שש התקבל בדיוק 2 פעמים.
מהי ההסתברות שנבחרה הקובייה הלא־מאוזנת?

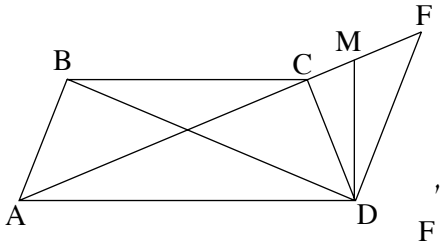
ג. זורקים n פעמים את הקובייה הלא־מאוזנת.
הבע באמצעות n את ההסתברות לקבל לפחות פעם אחת את המספר שש.

/המשך בעמוד 4/

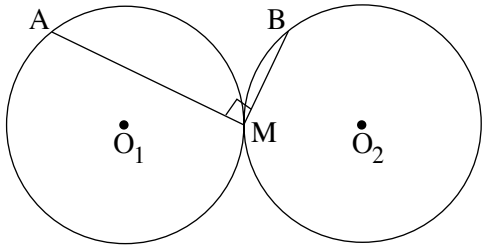
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



4. נתון טרפז שווה־שוקיים $ABCD$ $(BC \parallel AD)$.
דרך הקדקוד D העבירו אנך ל־ AD
וישר המקביל לשוק AB .
האנך חותך את המשך האלכסון AC בנקודה M ,
והישר המקביל חותך את המשך האלכסון בנקודה F
(ראה ציור).
נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CAD = \beta$.
א. הוכח כי $\Delta ABC \sim \Delta FDA$.
ב. הוכח כי $\sphericalangle CDM = \sphericalangle MDF$.
ג. הוכח כי $\frac{AC}{AF} = \frac{MC}{MF}$.



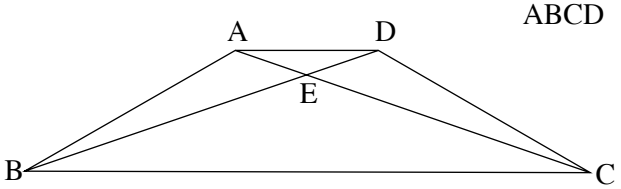
5. שני מעגלים, שיש להם אותו רדיוס R ,
משיקים זה לזה בנקודה M .
מעבירים מיתר MB במעגל
שמרכזו O_2 ,
ומיתר MA במעגל שמרכזו O_1
כך ש־ $\sphericalangle AMB = 90^o$ (ראה ציור).
א. (1) נמק מדוע $\sphericalangle O_1MO_2 = 180^o$.
(2) הוכח כי $AO_1 \parallel BO_2$.
ב. במשולש AMB העבירו תיכון לצלע AB .
הבע באמצעות R את אורך התיכון. נמק.

/המשך בעמוד 5/

6. בציור שלפניך טרפז שווה־שוקיים ABCD ($AD \parallel BC$).

נתון: $\sphericalangle CAD = \alpha$

$\sphericalangle BDC = \beta$



א. הוכח כי היחס בין שטח המשולש AED לשטח המשולש BEC הוא $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}} = \frac{\sin^2(2\alpha+\beta)}{\sin^2\beta}$.

ב. נתון גם: $\alpha = 30^o$, $\sqrt{\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}}} = \frac{1}{4}$.

מצא את β .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 - 6x + 9}$.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

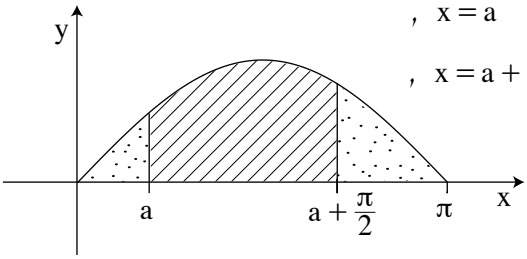
ב. (1) מצא את האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המקבילות לצירים.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמק.

/המשך בעמוד 6/

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x$ בתחום $0 \le x \le \pi$ (ראה ציור).

מעבירים שני ישרים שמשוואותיהם: $x = a$, $x = a + \frac{\pi}{2}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.



S_1 הוא השטח המוגבל על ידי שני הישרים, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x (השטח המקווקו בציור).

S_2 הוא סכום של שני שטחים, שכל אחד מהם מוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי אחד הישרים ועל ידי ציר ה־ x (סכום השטחים המנוקדים בציור).

מצא עבור איזה ערך של a היחס $\frac{S_1}{S_2}$ הוא מקסימלי.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 15}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. על סמך סעיפים א ו־ ב סרטט סקיצה של גרף הפונקציה, אם נתון כי הפונקציה יורדת בכל תחום שבו היא מוגדרת.

ד. נתון כי הישר $y = -kx + 8k$, $k > 0$, אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$. הישר מחלק את השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = 4$ ו־ $x = 8$, לשני שטחים שווים.

מצא את הערך של k .

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות לבתי ספר על־יסודיים
מועד הבחינה:	קיץ תש״ע, 2010
מספר השאלון:	035806
נספח:	דפי נוסחאות ל־4 ול־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

<u>תכנית ניסוי</u>

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה״כ	—	100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, <u>גם</u> כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את <u>כל</u> פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. רוכב אופניים אחד יצא ממקום A אל מקום B , ובאותה שעה בדיוק יצא רוכב אופניים אחר ממקום B אל מקום A . (המהירויות של רוכבי האופניים אינן משתנות.)
כעבור 4 שעות נפגשו רוכבי האופניים.
הזמן, שנדרש לרוכב האופניים שיצא מ־ A לעבור את הדרך שבין A ל־ B ,
גדול ב־ 108 דקות מהזמן שנדרש לרוכב האופניים שיצא מ־ B לעבור דרך זו.
א. מצא את היחס בין המהירות של רוכב האופניים שיצא מ־ B לבין המהירות של רוכב האופניים שיצא מ־ A .
ב. מצא בכמה שעות עבר כל אחד מרוכבי האופניים את הדרך שבין A ל־ B .

2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים. האיבר הראשון בסדרה הוא a_1 (שונה מאפס), והפרש הסדרה הוא d .
בונים סדרה חדשה שגם בה n איברים. האיבר הראשון בסדרה החדשה גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה הנתונה, והפרש הסדרה החדשה גם הוא d .
סכום הסדרה החדשה גדול פי 2 מסכום הסדרה הנתונה.
א. בטא את a_1 באמצעות d ו־ n .
ב. אם מגדילים את הפרש הסדרה הנתונה ב־ 3 (בלי לשנות את a_1 ואת n), מקבלים סדרה חשבונית שסכומה גדול פי 2 מסכום הסדרה הנתונה.
הראה כי הפרש הסדרה הנתונה הוא 2 .

/המשך בעמוד 3/

3. באחד הדוכנים בלונה פארק אפשר להשתתף במשחק שבו מסובבים שני גלגלים, A ו־ B.
כל גלגל מחולק ל־ 20 גזרות שוות (לכל אחת מהגזרות יש אותה הסתברות שהגלגל ייעצר עליה, והגלגל אינו נעצר בגבול שבין הגזרות).
בגלגל A יש 2 גזרות אדומות והשאר שחורות.
בגלגל B יש 4 גזרות אדומות והשאר שחורות.
תור אחד במשחק מורכב משני שלבים:
בשלב הראשון — משתתף במשחק מסובב את הגלגל A .
בשלב השני — אם הגלגל A נעצר על גזרה אדומה בשלב הראשון, המשתתף מסובב את הגלגל B . אם הגלגל A נעצר על גזרה שחורה בשלב הראשון, המשתתף מסובב שוב את הגלגל A .

א. ידוע שבתור אחד בשלב הראשון נעצר הגלגל A על גזרה אדומה.
מהי ההסתברות שבתור זה התקבלה בשלב השני גזרה שחורה?

ב. (1) מהי ההסתברות שבתור אחד תתקבל לפחות גזרה אדומה אחת?
(2) אם ידוע כי בתור אחד הייתה לפחות אחת מהגזרות אדומה, מהי ההסתברות שבתור זה התקבלה רק גזרה אדומה אחת?

ג. משתתף משחק n תורות. הבע באמצעות n את ההסתברות שלא תתקבל כלל גזרה אדומה.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

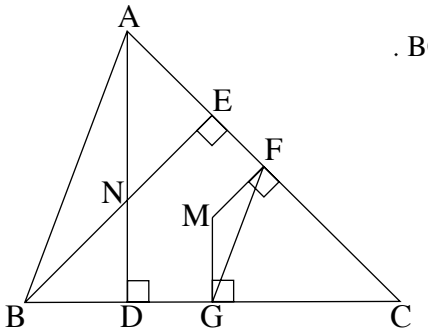
4. נתון משולש ABC חד־זוויות.

BE הוא גובה לצלע AC , ו־ AD הוא גובה לצלע BC .

הגבהים נפגשים בנקודה N .

FM הוא אנך אמצעי לצלע AC ,

ו־ GM הוא אנך אמצעי לצלע BC (ראה ציור).



א. הוכח :

(1) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle GFC$.

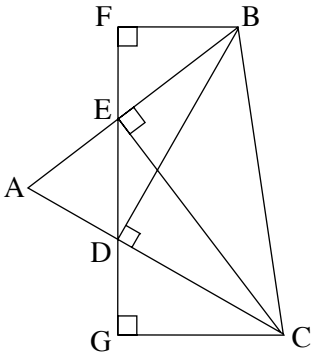
(2) $\sphericalangle ABN = \sphericalangle MFG$.

(3) $\Delta ANB \sim \Delta GMF$.

ב. מצא את היחס $\frac{BN}{FM}$. נמק.

5. נתון משולש חד־זוויות ABC.

CE הוא גובה לצלע BA , ו־ BD הוא גובה לצלע AC.



א. הוכח:

(1) המשולש DBC חסום במעגל

החוסם את המשולש EBC .

(2) $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DEC$.

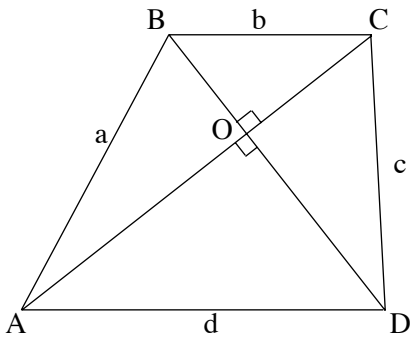
BF ו־ CG מאונכים להמשכי הקטע ED , כמתואר בציור.

הוכח:

ב. $\Delta DCB \sim \Delta FEB$.

ג. $\Delta DGC \sim \Delta BEC$.

/המשך בעמוד 5/



6. בטרפז $ABCD$ ($AD \parallel BC$)

נתון: $AC \perp BD$, $AB = a$, $BC = b$,

$CD = c$, $AD = d$ ($d > b$) .

אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

א. הוכח כי $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

ב. דרך קדקוד B מעבירים ישר המקביל לשוק CD .

הישר חותך את הבסיס AD בנקודה M .

נתון: $\sphericalangle ABM = \alpha$. הוכח כי $\cos\alpha = \frac{bd}{ac}$.

ג. הבע באמצעות α , b ו־ d :

(1) את שטח המשולש ABM .

(2) את שטח הטרפז $ABCD$.

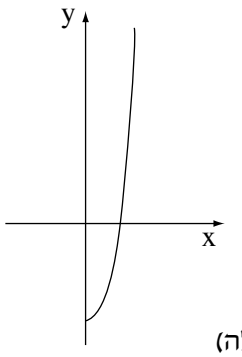
/המשך בעמוד 6/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8}{x+2}$, $x \neq -2$.



א. בציור מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $x \geq 0$.
מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$
בנקודה שבה $x = 1$.
מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$,
על ידי המשיק ועל ידי ציר ה־y עבור $x \geq 0$.

ב. (1) מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)
עבור כל תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל תחום ההגדרה שלה.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)|$
סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 - \cos x - \sin^2 x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
עבור התחום הנתון ענה על הסעיפים א-ד.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
($f(x)$ גזירה גם בקצות התחום הנתון.)

ד. נתון כי גרף הפונקציה $g(x) = a - \cos x - \sin^2 x$ משיק לציר ה־x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד.
מהו הערך של a ? נמק.

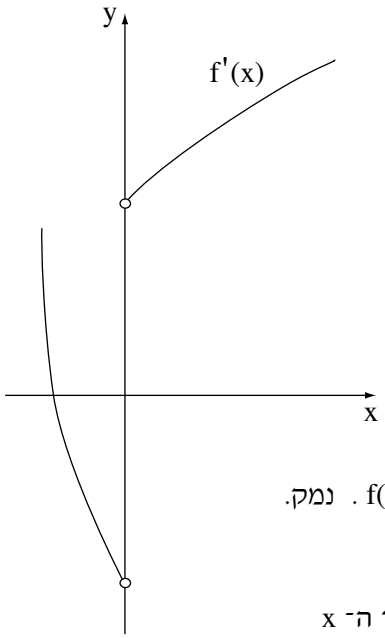
/המשך בעמוד 7/

9. $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$.

בציור מוצג הגרף של $f'(x)$.

$f(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת בתחום $x \geq -4$.

נתון: $f'(x) = \dfrac{6x^2+16x}{\sqrt{x^3+4x^2}}$.



א. מצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.

ב. מצא את האסימפטוטה האנכית של $f'(x)$.

ג. מצא את שיעור ה־ x של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ה. נתון: $f(a) = 4\sqrt{3}$, $-2\frac{2}{3} < a < 0$.

השטח, המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = a$, הוא $\frac{28\sqrt{3}}{9}$.

מצא את ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.

אין צורך למצוא את $f(x)$, ואין צורך למצוא את a .

בתשובתך תוכל להשאיר $\sqrt{3}$ או לדייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות לבתי ספר על־יסודיים
מועד הבחינה:	חורף תש״ע, 2010
מספר השאלון:	035806
נספח:	דפי נוסחאות ל־4 ול־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

<u>תכנית ניסוי</u>

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
			סה״כ		—	100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, <u>גם</u> כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את <u>כל</u> פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני צינורות, צינור I וצינור II, ממלאים יחד במים את כל הנפח של בֵּרֵכה במשך 6 שעות.
(קצב הזרמת המים של כל אחד מהצינורות אינו משתנה.)
יום אחד, צינור I מילא לבדו רבע מנפח הבֵּרֵכה, וצינור II מילא לבדו עוד רבע מנפח הבֵּרֵכה, וכך התמלא חצי מנפח הבֵּרֵכה במשך m שעות.

א. (1) הבע באמצעות m את הזמן הדרוש לצינור I למלא את כל נפח הבֵּרֵכה לבדו.
(2) מצא עבור איזה ערך של m יש פתרון אחד לבעיה.

ב. נתון כי כאשר כמות המים בבֵּרֵכה היא 70% מנפח הבֵּרֵכה, צינור I ממלא לבדו את נפח הבֵּרֵכה הנותר במשך 3 שעות.
מצא את m במקרה זה.

2. נתונה המשוואה $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$, $m \neq 0$.

א. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה שני פתרונות שונים?

α ו־ β הם שני פתרונות שונים של המשוואה.

ב. (1) הוכח כי α , $m+1$, β הם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית.
(2) הוכח כי α , m , β הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

ג. הראה כי $\alpha > 0$ וגם $\beta > 0$.

/המשך בעמוד 3/

3. בוחרים באקראי 3 אנשים מעיר גדולה. ההסתברות ששלושתם הם בעלי השכלה גבוהה היא 0.064 .

ההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין בעלי השכלה גבוהה בעיר קטנה פי 2 מההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין אלו שאינם בעלי השכלה גבוהה.

א. ידוע שאדם מהעיר מרכיב משקפיים.

מהי ההסתברות שהוא בעל השכלה גבוהה?

ב. בוחרים באקראי 4 אנשים מבין תושבי העיר שאינם בעלי השכלה גבוהה.

ההסתברות שארבעתם אינם מרכיבים משקפיים היא $\frac{81}{256}$.

מהי ההסתברות שאדם בָּעיר מרכיב משקפיים והוא גם בעל השכלה גבוהה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

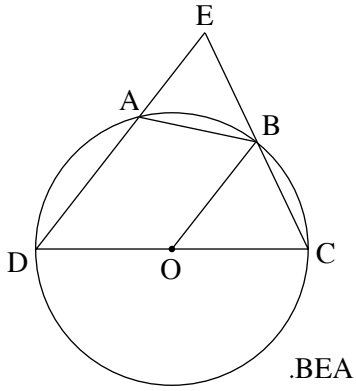
ענה על שתיים מהשאלות 6-4 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4. במעגל שמרכזו O חסום מרובע ABCD .

DC הוא קוטר.

המשכי הצלעות DA ו־ CB נפגשים בנקודה E (ראה ציור).



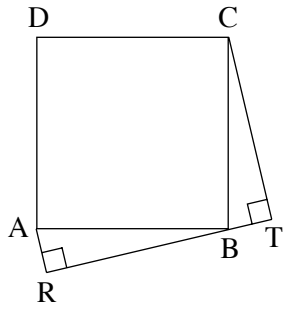
נתון: $OB \parallel DE$, $\sphericalangle BOC = \alpha$.

א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle ABO$.

ב. נתון כי שטח המשולש OBC שווה לשטח המשולש BEA.

הוכח כי $\triangle OBC \cong \triangle BEA$.

/המשך בעמוד 4/



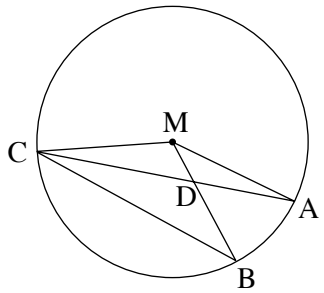
.5 נתון ריבוע ABCD .

דרך הקדקוד B העבירו ישר TR .

AR ו־ CT מאונכים לישר זה (ראה ציור).

א. הוכח כי $AR + CT = TR$.

ב. הבע את שטח המרובע ACTR באמצעות TR .



.6 A , B ו־ C הן נקודות על מעגל שמרכזו M .

AC ו־ BM נחתכים בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle CBM = 2\sphericalangle ACB$,

שטח המשולש CBD גדול פי 1.5

משטח המשולש CDM .

חשב את $\sphericalangle CBM$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

.7 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x-b)^2}{x^2-4}$, $b > 2$.

א. מצא (הבע באמצעות b במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות שלה המקבילות לצירים.

(2) את השיעורים של נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. על פי הסקיצה של גרף הפונקציה, מצא את התחום שבו

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית וגם פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית,

אם ידוע כי ל־ $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד. נמק.

/המשך בעמוד 5/

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2\cos^2(\frac{x}{2})-1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$ בתחום $-3\pi \le x \le 3\pi$.

א. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה בתחום הנתון.

ג. לפונקציה יש שלוש נקודות מקסימום בתחום הנתון.

מצא את השיעורים של נקודות אלה.

ד. העבירו ישר דרך נקודות המקסימום של הפונקציה.

מצא בתחום $-\pi \le x \le \pi$ את השטח המוגבל על ידי הישר,

על ידי גרף הפונקציה, על ידי שתי האסימפטוטות של הפונקציה ועל ידי ציר ה־ x .

9. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, $a>0$.

מנקודה $B(b,0)$ $(b>0)$ העבירו אנך לציר ה־ x .

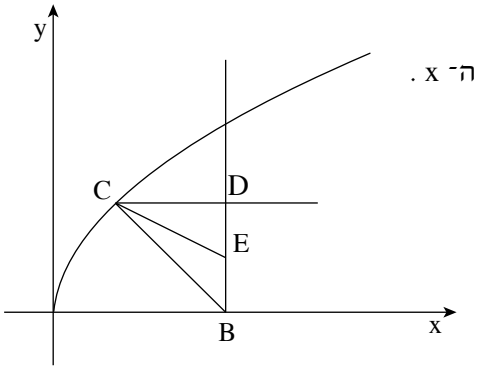
C היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$.

מנקודה C העבירו ישר המקביל לציר ה־ x

וחותך את האנך בנקודה D .

הנקודה E היא אמצע הקטע BD

(ראה ציור).



נתון כי עבור $C(2,4)$ שטח המשולש CBE הוא מקסימלי.

מצא את הערך של a ואת הערך של b .

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות לבתי ספר על־יסודיים
מועד הבחינה:	קיץ תשס״ט, **מועד ב**
מספר השאלון:	035806
נספח:	דפי נוסחאות ל־4 ול־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

<u>תכנית ניסוי</u>

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה״כ	—	100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, <u>גם</u> כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את <u>כל</u> פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

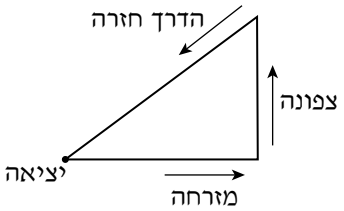
שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. הולך רגל יוצא כל בוקר להליכה
לאורך מסלול שאורכו הכולל הוא 24 ק"מ.
הוא יוצא מביתו לכיוון מזרח והולך m ק"מ.
אחר כך הוא פונה צפונה והולך 1.5 שעות.
לאחר מכן הוא חוזר לביתו בדרך הקצרה ביותר (ראה ציור).
בדרכו חזרה הוא הולך 60 דקות פחות מהזמן שבו הוא הולך בשני הכיוונים יחד, מזרחה וצפונה.
בכל קטעי הדרך הוא הולך באותה מהירות קבועה.
חשב את m .



2. נתון הסכום $S_n = \frac{5}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{5}{4^2} + ... + \frac{5}{(n+1)^2}$.

א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n < 5 - \frac{5}{n+1}$.

ב. נתון כי $S_n < 4.999$.
חשב כמה איברים לכל היותר יכולים להיות בסכום S_n
(כדי שהנתון יתקיים בוודאות).

/המשך בעמוד 3/

3. בשכבה י"א יש שתי כיתות: י"א 1 ו- י"א 2.

בכיתה י"א 1 יש 40 תלמידים, ולמחציתם יש מחשב נישא.

בכיתה י"א 2 יש 35 תלמידים, ול- 40% מהם יש מחשב נישא.

א. בחרו באקראי תלמיד משכבה י"א, ונמצא שיש לו מחשב נישא.

מהי ההסתברות שהוא לומד בכיתה י"א 2?

ב. בחרו באקראי בזה אחר זה (בלי החזרה) 2 תלמידים מכיתה י"א 1,

ובאותו אופן בחרו 2 תלמידים מכיתה י"א 2.

מהי ההסתברות של- 2 התלמידים מכיתה י"א 1 וגם ל- 2 התלמידים מכיתה י"א 2

אין מחשב נישא?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AC = AB)$

חסום מלבן GFED כך שהקדקודים D ו- E

מונחים על הצלע AB , והקדקודים F ו- G

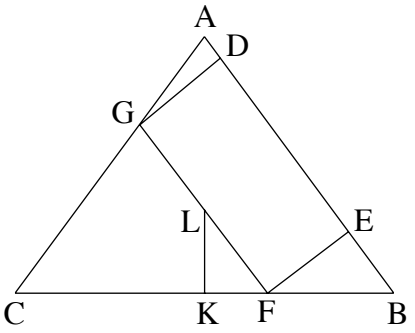
מונחים על הצלעות BC ו- CA בהתאמה.

נקודה L , הנמצאת על צלע המלבן GF ,

היא מפגש התיכונים במשולש ABC .

דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC ,

החותך את BC בנקודה K (ראה ציור).



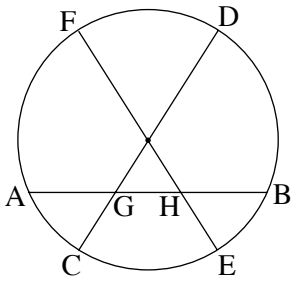
א. הוכח כי $\triangle KAB \sim \triangle KLF \sim \triangle EFB$.

אם $AB =$ 15 ס"מ , $BC =$ 18 ס"מ , חשב:

ב. את אורך הקטע KF . נמק.

ג. את אורך הקטע FE . נמק.

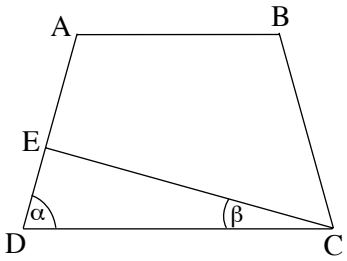
/המשך בעמוד 4/



5. במעגל המיתר AB חותך את הקוטר CD בנקודה G , ואת הקוטר FE בנקודה H (ראה ציור).

א. אם 2 ס"מ = AG = BH , 5.5 ס"מ = GB , ורדיוס המעגל הוא 6 ס"מ, מצא את האורך של הקטע GC ואת האורך של הקטע HE . נמק. (GC ו־ HE קטנים מרדיוס המעגל.)

ב. הוכח כי $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$.



6. בטרפז שווה־שוקיים ABCD הזווית ליד הבסיס הגדול היא α .
E היא נקודה על השוק AD כך ש־ $\sphericalangle ECD = \beta$ (ראה ציור).

נתון כי אורך השוק של הטרפז שווה לאורך הבסיס הקטן AB .

א. הבע באמצעות α ו־ β את היחס בין שטח המשולש DEC לשטח המשולש BDC $(\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BDC}})$.

ב. נתון: $\sphericalangle AEC = 90^o$,
אורך אלכסון הטרפז גדול פי 1.5 מאורך הבסיס הקטן AB .
חשב את היחס $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BDC}}$.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

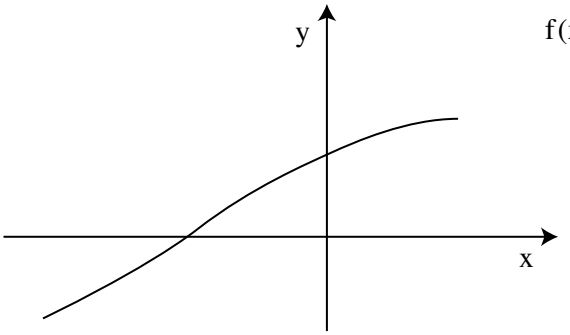
7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$

בתחום $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (ראה ציור).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה

בנקודת החיתוך של הגרף

עם ציר ה־ y .



מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה־ x .

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-a}{x-b}$; $a, b > 0$; $a \neq b$.

המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם הצירים מקבילים זה לזה.

א. הוכח כי $a = 2b$.

הצב $a = 2b$, וענה על הסעיפים ב-ז שלפניך (הבע באמצעות b במידת הצורך).

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

ג. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ד. מצא נקודות חיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ה. מצא תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

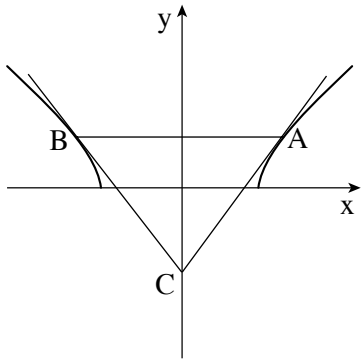
ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ז. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $b < 0$.

נמק את שיקוליך בסרטוט הגרף עבור תחומי עלייה וירידה ועבור תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.

/המשך בעמוד 6/

9. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-24}$.



העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A

שבה $x=t$.

מנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה־ x

וחותך את גרף הפונקציה בנקודה B .

בנקודה B העבירו עוד משיק לגרף הפונקציה.

המשיקים נפגשים בנקודה C שעל ציר ה־ y (ראה ציור).

א. הראה כי הפונקציה זוגית.

ב. מצא את הערך של t שעבורו שטח המשולש ABC הוא מינימלי.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה:	בגרות לבתי ספר על־יסודיים
מועד הבחינה:	קיץ תשס״ט, 2009
מספר השאלון:	035806
נספח:	דפי נוסחאות ל־4 ול־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

<u>תכנית ניסוי</u>

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש וחצי שעות.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה״כ	—	100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, <u>גם</u> כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את <u>כל</u> פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. רוכב אופניים יצא בשעה 08:00 מעיר A , ורוכב אופניים שני יצא בשעה 09:00 מעיר A .
כל אחד מהרוכבים רכב במהירות קבועה לעיר B . המרחק בין A ל־ B הוא 45 ק"מ.
כאשר הרוכב הראשון הגיע לעיר B , הרוכב השני עדיין לא הגיע לעיר B והיה במרחק של 25 ק"מ ממנה.
מהירות הרוכב הראשון גדולה ב־ m קמ"ש ממהירות הרוכב השני, וידוע כי $0 < m < 5$.
   א. הבע באמצעות m את שני הפתרונות האפשריים למהירות הרוכב השני.
   ב. נסמן את שני הפתרונות שהבעת בסעיף א ב־ x_1 וב־ x_2 .
   מצא עבור אילו ערכי m מתקיים $|x_1 - x_2| < 11$.

2. א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי השוויון
$$1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \ldots - (2n-1)^2 = -2n^2$$
נכון לכל n טבעי זוגי.
   ב. נתון כי $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \ldots + c^2 = 1921$.
   מצא את c .

/המשך בעמוד 3/

3. ידוע כי בכפר מסוים 20% מהתושבים חולים במחלת מעיים.

רופא הכפר בדק את כל התושבים.

90% מהחולים בכפר אובחנו על ידו כחולים,

ו־ 10% מהבריאים בכפר אובחנו על ידו כחולים.

א. מהו אחוז התושבים בכפר שלגביהם הרופא ביצע אבחנה שגויה?

הרופא נתן תרופה לכל מי שאובחן על ידו כחולה.

התרופה גרמה לפריחה אצל 60% מהחולים שאובחנו כחולים,

ואצל 25% מהבריאים שאובחנו כחולים.

ב. מהי ההסתברות שתושב בכפר הוא חולה, אם ידוע שיש לו פריחה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4. ABC הוא משולש שווה־צלעות החסום במעגל.

N ו־ P הן נקודות על המעגל.

BN ו־ AP נפגשים בנקודה S (ראה ציור).

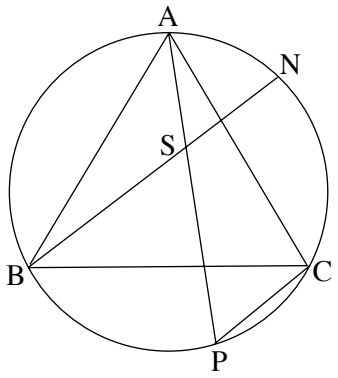
נתון: $PC \parallel BN$.

הוכח כי:

א. המשולש BSP הוא שווה־צלעות.

ב. המרובע SPCN הוא מקבילית.

ג. $AN = PC$.



/המשך בעמוד 4/

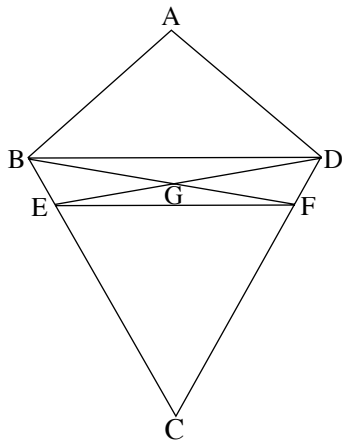
.5 ABCD הוא דלתון שבו $AB = AD$ ו־ $BC = DC$.

E נקודה על הצלע BC , ו־ F נקודה על הצלע DC

כך ש־ DE חוצה את הזווית ADC ,

ו־ BF חוצה את הזווית ABC .

BF ו־ DE נפגשים בנקודה G (ראה ציור).



א. הוכח:

(1) $GB = GD$.

(2) $\Delta BGE \cong \Delta DGF$.

ב. הוכח כי המרובע DBEF הוא טרפז שווה־שוקיים.

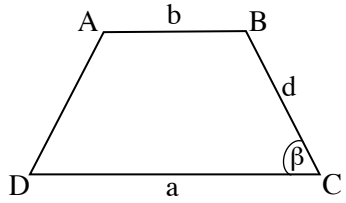
.6 בטרפז שווה־שוקיים ABCD $(AB \parallel DC)$

אורך הבסיס הגדול CD הוא a ,

אורך הבסיס הקטן AB הוא b

ואורך השוק הוא d .

הזווית ליד הבסיס הגדול DC היא β (ראה ציור).



א. הוכח כי אורך אלכסון הטרפז הוא $\sqrt{ab + d^2}$.

ב. הזווית בין אלכסון הטרפז ובין הבסיס הגדול של הטרפז היא α .

הוכח כי אם $\alpha + \beta = 90^o$,

אז $\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \sqrt{\frac{a^2 - ab}{2b^2}}$.

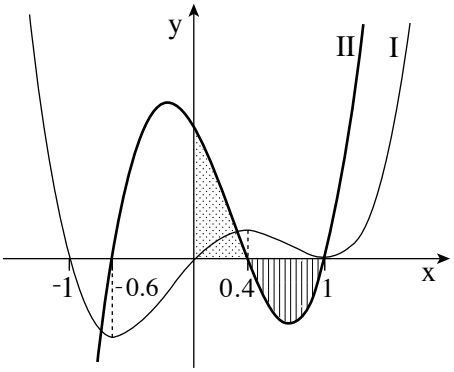
/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9.

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. בציור שלפניך מוצגות סקיצות של שני גרפים: גרף I וגרף II .
אחד הגרפים הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, והגרף האחר הוא הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.



א. איזה גרף הוא של $f'(x)$, ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמק.

ב. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ג. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הוכח שהשטח המוגבל על ידי גרף II וציר ה־ x (השטח המקווקו בציור) שווה לשטח המוגבל על ידי גרף II והצירים (השטח המנוקד בציור).

/המשך בעמוד 6/

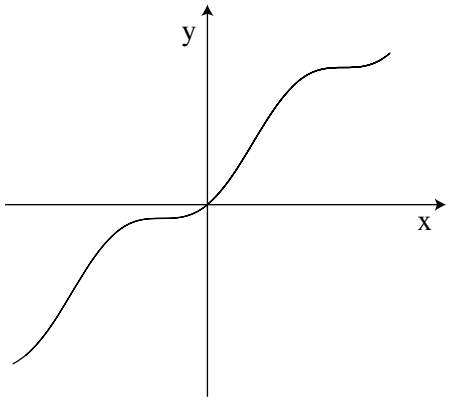
8. נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$.

א. הראה כי $f'(x) = 2\sin^2 x$.

ב. (1) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

ג. בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $g(x) = x + \sin^2 x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$. בתחום הנתון מצא את כל השטח המוגבל על ידי הגרף של $g(x)$ ועל ידי הישר $y = x$.



9. נתון משולש שאחת מצלעותיו היא 10 ס"מ, וגובה המשולש לצלע זו הוא 5 ס"מ. (המשולש אינו קהה־זווית.)

א. מבין כל המשולשים שהם כאלה, מצא את צלעות המשולש שהיקפו מינימלי.

ב. מה הן תכונות המשולש שאת צלעותיו מצאת בסעיף א?

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

מדינת ישראל

משרד החינוך

משימות והצעת תשובות

קיץ תשע"ד

מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

בעיות תנועה

משימה 1

משאית יצאה מתחנה A ונסעה במהירות קבועה לכיוון תחנה B .

2 שעות אחרי היציאה הגיעה המשאית לתחנה C , הנמצאת בין A ל־ B ,

ואז הקטינה המשאית את מהירותה ל־ $\frac{1}{3}$ ממהירותה הקודמת.

המשאית הגיעה לתחנה B , 40 דקות אחרי השעה שבה הייתה מגיעה

אילו לא הקטינה את מהירותה.

למחרת יצאה המשאית מתחנה A באותה מהירות קבועה, וכשהגיעה למרחק של 14 ק"מ

אחרי התחנה C , הקטינה את מהירותה ל־ $\frac{1}{3}$ ממהירותה הקודמת.

הפעם הגיעה המשאית לתחנה B , 20 דקות אחרי השעה שבה הייתה מגיעה

אילו לא הקטינה את מהירותה.

א. אילו המשאית לא הקטינה את מהירותה, כמה שעות הייתה נמשכת הנסיעה שלה מ־ A ל־ B ?

ב. מצא את המהירות שהייתה למשאית לפני שהקטינה את מהירותה.

סדרה חשבונית

משימה 2

נתונה הסדרה: $1 , -5 , 9 , -13 , 17 , -21 , \ldots$

הערכים המוחלטים של איברי הסדרה מהווים סדרה חשבונית.

האיברים במקומות הזוגיים בסדרה הם שליליים.

נתון כי הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה הנתונה הוא 101 .

מצא את הסכום של n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי־זוגיים בסדרה הנתונה.

הסתברות

משימה 3

עורכים את הניסוי שלפניך.

בכד יש 10 כדורים: 6 כדורים אדומים ו־ 4 כדורים שחורים.

מוציאים באקראי כדור מהכד:

אם הכדור הוא אדום, משאירים אותו בחוץ ומוסיפים לכד x כדורים אדומים,

ואם הכדור הוא שחור, מחזירים אותו לכד.

לאחר מכן מוציאים באקראי כדור נוסף מהכד.

ההסתברות שלשני הכדורים שמוציאים יהיה אותו הצבע היא 0.56 .

א. חשב את x .

ב. ידוע שלפחות אחד מהכדורים שהוצאו היה אדום.

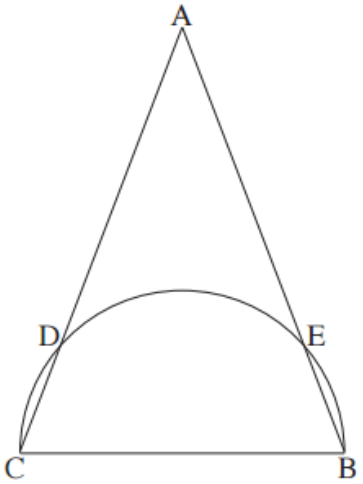
מהי ההסתברות שבהוצאה השנייה הכדור שהוצא היה שחור?

ג. חוזרים n פעמים על הניסוי שתואר בפתיח.

מהי ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים בניסוי אחד בדיוק? (הבע באמצעות n .)

גאומטריה במישור

משימה 4



נתון משולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$.

הבסיס BC הוא קוטר של חצי מעגל.

חצי המעגל חותך את השוקיים AB ו־ AC

בנקודות E ו־ D בהתאמה (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה־שוקיים.

ב. נתון: $DC = \frac{1}{3}AD$, רדיוס המעגל הוא R .

הוכח כי $R = \sqrt{2}\,DC$.

טריגונומטריה

משימה 5

במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a, והזווית מולה היא α.

נתון: $\frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}$.

א. הבע את שטח המשולש ABC באמצעות a ו־ α.

ב. נתון גם: $\alpha = 60^{o}$.

מצא את הזוויות האחרות במשולש ABC.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות

משימה 6

נתונה הפונקציה $f(x)=2x+8\cos^2(\frac{x}{2})-\sin(2x)$, בתחום $0\le x\le \pi$.

א. (1) הראה כי $f'(x)=4\sin^2 x-4\sin x$.

(2) בתחום הנתון, מצא את נקודות הקיצון המוחלט של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. (1) בתחום הנתון, סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) נתונה המשוואה $\sin^2 x-\sin x=k$, $0\le x\le \pi$.

מצא עבור אילו ערכים של k יש פתרון למשוואה.

ג. בתחום הנתון, מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי ציר ה־ y, על ידי הישר המשיק לגרף של פונקציית הנגזרת בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{6}$

ועל ידי הישר $x=\pi$.

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות שורש ושל פונקציות מנה

משימה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

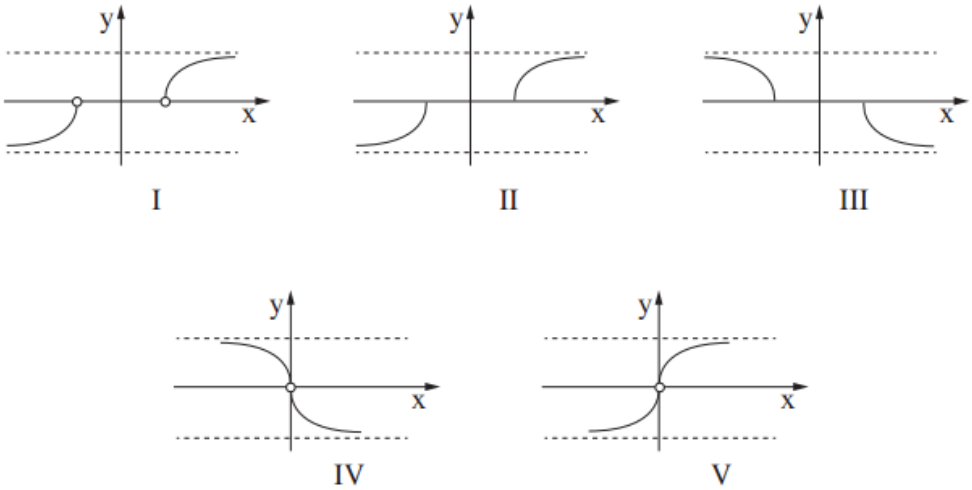
(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{\sqrt{x^2-15}}{x}$.

לפניך חמישה גרפים I-V.



איזה גרף מתאר את הפונקציה $g(x)$? נמק.

ג. עבור אילו ערכי x מתקיים האי־שוויון $\frac{f'(x)}{g'(x)} < 0$? נמק.

בעיות מינימום / מקסימום

משימה 8

נתונה הפרבולה $y = x^2 - 12$.

נקודה B נמצאת על הפרבולה ברביע הרביעי.

נקודה C נמצאת על ציר ה־ x כך ש־ $BC = BO$, O — ראשית הצירים.

(נקודה C שונה מנקודה O .)

מצא את השטח המוגבל על ידי הפרבולה, על ידי ציר ה־ y ועל ידי הקטע BO ,

כאשר השטח של המשולש BCO הוא מקסימלי.

דוגמאות לשאלות דמויות בגרות
שאלון 035581

פעילות לתלמידים
לכיתה י"א – 5 יח"ל

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

אוסף שאלות לתרגול שאלון 581, י"א 5 יחידות

1. <u>סדרות</u>

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ מוגדרת על- ידי כלל הנסיגה (n מספר טבעי):

$$\begin{cases} S_1 = 9 \\ S_{n+1} = S_n - 7n + 9 \end{cases}$$

כאשר: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

א. הוכח שהסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ היא חשבונית.

סדרה נוספת מקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n$

ב. חשב את הסכום הבא (רשום תשובתך באמצעות שברים, או בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית): $\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2} + \frac{b_3-b_2}{a_2-a_3} + \frac{b_4-b_3}{a_3-a_4} + \cdots + \frac{b_{20}-b_{19}}{a_{19}-a_{20}}$

2. <u>הסתברות</u>

ערכו סקר בין משתתפי כינוס בחירות ומצאו: 20% מהנשים קוראות עיתון בוקר. מספר הגברים גדול פי a ממספר הנשים שקוראות עיתון בוקר.

א. בטא באמצעות a את ההסתברות לבחור גבר מבין כלל תושבי העיר.

ב. מהי ההסתברות לבחור משתתף/משתתפת שקורא/קוראת עיתון בוקר, אם ידוע שהמאורעות: "נבחרה אישה" ו-"נבחר מישהו שקורא/קוראת עיתון בוקר" בלתי תלויים? הסבר.

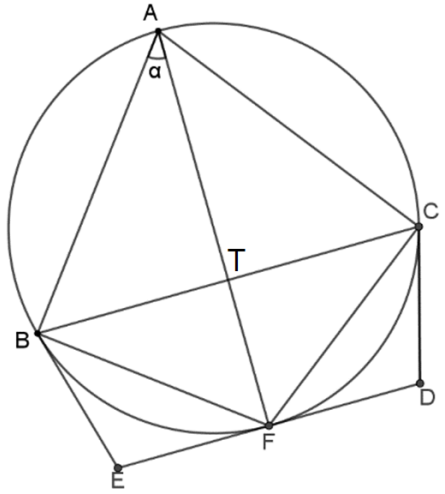
ג. עבור הסעיפים הבאים: ידוע כי $a = 6$.

נבחר באקראי משתתף/משתתפת מבין באי הכינוס. ידוע שהוא קורא/קוראת עיתון בוקר. מה סביר יותר, שהוא גבר או אישה?

ד. הנח כי מספר המשתתפים בכינוס גדול מאד. בוחרים באקראי 6 ממשתתפי הסקר (גברים או נשים). מהי ההסתברות לבחור לפחות חמש נשים שקוראות עיתון בוקר?

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

3. <u>טריגונומטריה</u>



במעגל שרדיוסו R חסום משולש ABC.

ידוע כי:

AF הוא קוטר במעגל.

המשיק למעגל בנקודה F מקביל למיתר BC.

הנקודה E היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב-F עם המשיק למעגל ב-B.

הנקודה D היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב-F עם המשיק למעגל ב-C. AF ו- BC נפגשים בנקודה T.

נתונה הזווית: $\sphericalangle BAF = \alpha$.

א. בטא באמצעות α את $\sphericalangle BEF$. הסבר שיקוליך בקצרה.
אין צורך לפרט כהוכחה בגיאומטריה.

ב. הוכח כי: $BE = R\tan\alpha$.

ג. חשב את מידת הזווית α עבורה שטח המשולש BFC גדול פי 3 משטח המשולש BEF.

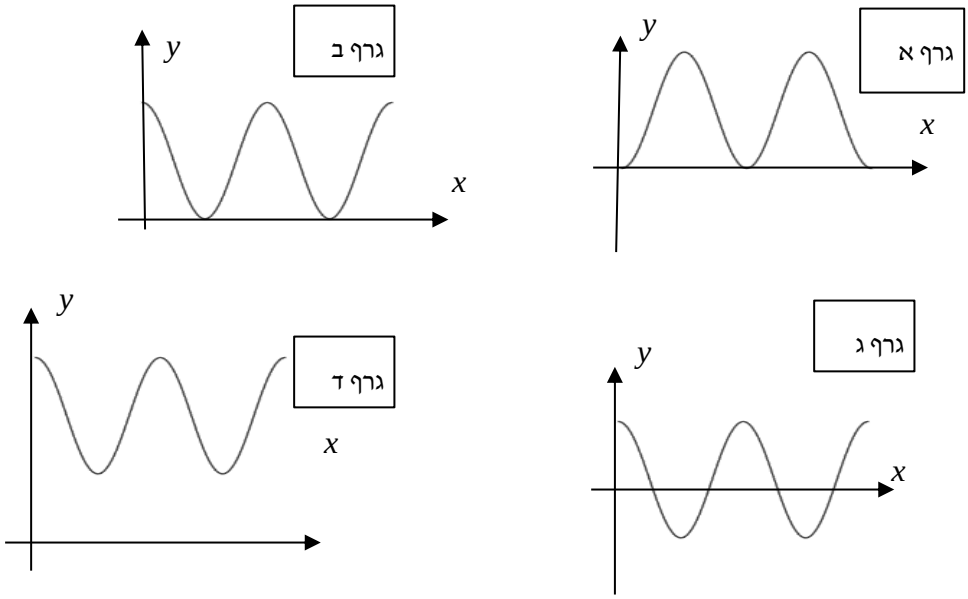
ד. עבור $\alpha = 30^\circ$, בטא באמצעות R את אורכו של הקטע BD .

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

4. <u>אנליזה</u>

נתונות הפונקציות: $f(x) = 2cos^2 2x$, $g(x) = cos4x + 2$.

א. מצא לכל אחת מהפונקציות את הגרף המתאים מבין ארבעת הגרפים הבאים, נמק קביעתך.



ב. הוכח: $g(x) = f(x) + c$ מה ערכו של c ?

ג. בכמה גדול $\int_0^{\pi} g(x)dx$ מ- $\int_0^{\pi} f(x)dx$. נמק תשובתך. (אין חובה לחשב במפורש את שני האינטגרלים).

ד. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר מסיבוב סביב ציר ה- x של גרף הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ בתחום: $0 \le x \le \pi$.

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

5. <u>אנליזה</u>

נתונה הפונקציות: $g(x) = 1 + cos(ax)$ $(a > 0)$, $f(x) = \frac{sinx}{g(x)}$.

המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות של $g(x)$ עם ציר ה-x הוא π.

א. מצא את ערכו של a .

הצב את הערך של a שמצאת וחקור את הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \le x \le 3\pi$:

ב. ציין את:
- נקודות חיתוך עם הצירים,
- אסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש),
- תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון (אם יש).

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. הוסף לאותה מערכת צירים סקיצה לגרף הפונקציה: $h(x) = \sqrt{f(x)}$.
התייחס לתחום ההגדרה של $h(x)$.

6. <u>אנליזה - דומה לשאלה 5</u>

נתונה הפונקציות: $g(x) = 1 + cos(ax)$ $(a > 0)$, $f(x) = \frac{sinx}{(1+cos(ax))^2}$.

המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות של $g(x)$ עם ציר ה- x הוא π.

א. מצא את ערכו של a .

הצב את הערך של a שמצאת וחקור את הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \le x \le 3\pi$:

ב. הוכח כי: $f'(x) = \frac{1+3sin^2x}{4cos^5x}$

ג. ציין את:
- נקודות חיתוך עם הצירים,
- אסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש),
- תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון (אם יש).

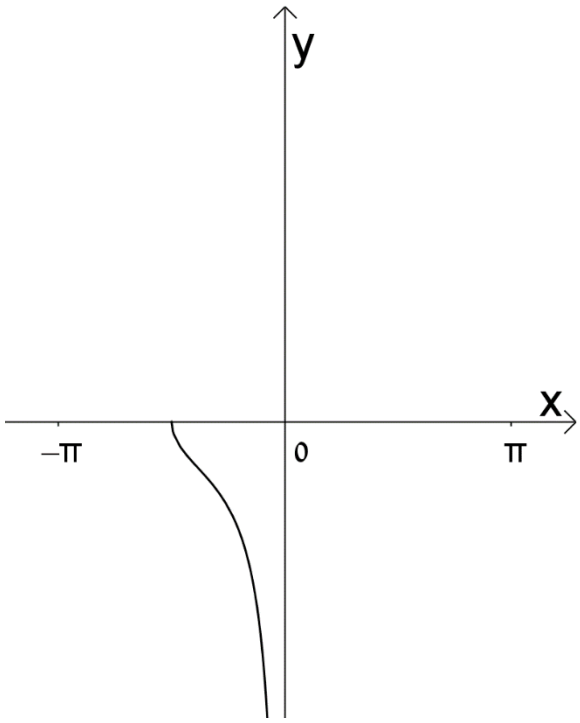
ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$. לבין ציר ה- x לבין הישר: $x = \frac{\pi}{4}$

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

7. <u>אנליזה</u>

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{cos(x)}}{sin(x)}$ בתחום: $-\pi \le x \le \pi$



א. רשום, עבור התחום הנתון בשאלה:

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(2) האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או אחרת? נמק קביעתך.

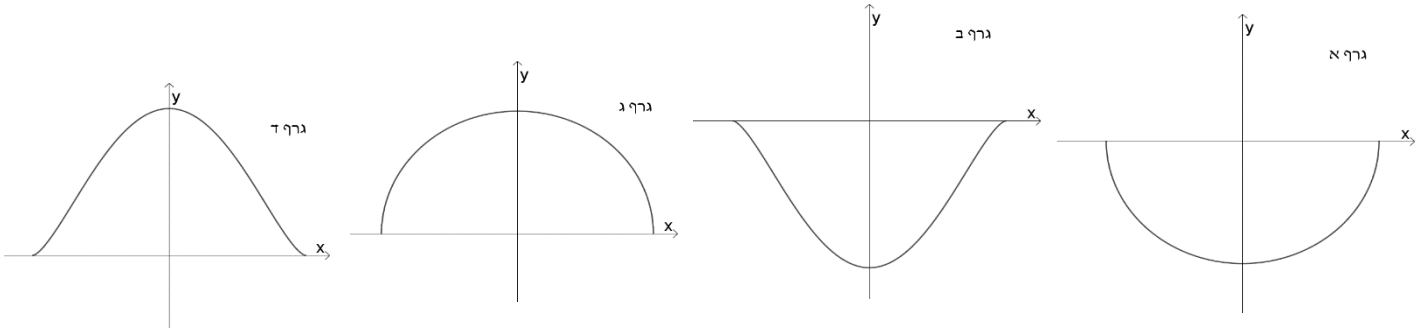
ב. לפניך גרף של הפונקציה בחלק מהתחום הנתון. השלם אותו, כך שיתאר את הגרף של הפונקציה בכל התחום הנתון.

ג. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר: $x=\frac{\pi}{4}$ מסתובב סביב ציר ה-x. חשב את נפח הגוף הנוצר באופן זה.

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

8. <u>אנליזה</u>

נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{k^2-x^2}$, $k>0$.



א. בחר בין הגרפים הבאים את הגרף המתאים לפונקציה. נמק בחירתך.

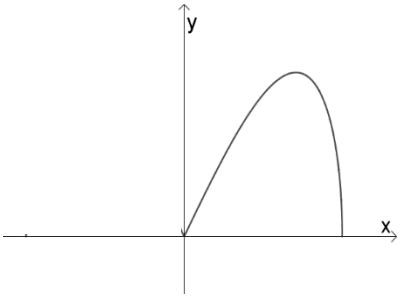
ב. מנקודה **<u>מימין לציר y</u>** (נסמנה A) שעל הגרף של $f(x)$ מעבירים אנכים לצירים. האנך לציר x חותך את הציר בנקודה B, האנך לציר y חותך את הציר בנקודה C. הנקודה O היא ראשית הצירים.

(1) בטא באמצעות k את שיעורי הנקודה בה מתקבל שטח מקסימלי למרובע $ABOC$ הנוצר באופן זה.

(2) ידוע כי השטח המקסימלי של מרובע $ABOC$ שנוצר באופן זה הוא: 2. מצא את ערכו של k.

(3) לפניך הגרף המתאים לתיאור פונקציית השטח של המרובעים $ABOC$, כאשר הנקודה A שעל הגרף מימין לציר y.

שרטט גרף שיתאר את פונקציית השטח של המרובעים $ABOC$, כאשר הנקודה A נמצאת משמאל לציר ה-y. פרט שיקוליך



מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך