

אינטגרלים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים של פונקציה מעריכית עם בסיס e

אינטגרלים פשוטים – תרגיל 1

$$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$$

האינטגרל נכון עבור כל $m \neq 0$

$$\int e^{2-x} dx = \frac{e^{2-x}}{-1} + c \quad \text{דוגמה 2:}, \quad \int e^{3x+4} dx = \frac{e^{3x+4}}{3} + c \quad \text{דוגמה 1:}$$

דגשים וטעויות נפוצות:

- **הביטוי שנמצא במעריך** חייב להיות מהצורה של **קו ישר** כלומר $mx + n$.
לדוגמה לביטויים האלה e^{1-x} , e^{-3x+4} , e^{2x-3} , e^{x+1} **אפשר** לבצע אינטגרל לפי התבנית הזאת. אבל לביטויים כמו: $e^{1-\sqrt{x}}$, $e^{\frac{1}{x}}$, e^{2x^3-2x} , e^{x^3+1} **אי אפשר** לבצע אינטגרל לפי התבנית הזאת.
- משתמשים בתבנית הזאת רק כשה**משתנה** נמצא **במעריך** (כלומר הפונקציה מעריכית).
 - **טעות נפוצה 1:** הרבה תלמידים משתמשים בתבנית הזאת: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ כדי לבצע אינטגרל לביטויים כמו הביטוי הזה: e^{2x-3} בעוד שהיא **לא מתאימה**. היא מתאימה רק לביטויים שבהם המשתנה נמצא **בבסיס**.

$$\int e^{2x+3} dx = \frac{e^{2x+4}}{2x+4} + c \quad \text{X דרך לא נכונה:}$$

(שימוש X לא מתאים בתבנית הזאת $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$)

$$\int e^{2x+3} dx = \frac{e^{2x+3}}{2} + c \quad \text{✓ כך נבצע לביטוי הזה אינטגרל בצורה נכונה:}$$

(שימוש ✓ מתאים בתבנית הזאת $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$)

- **טעות נפוצה 2:** הרבה תלמידים משתמשים בתבנית הזאת: $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$ כדי לבצע אינטגרל לביטויים כמו הביטוי הזה: x^{2n+3} בעוד שהיא **לא מתאימה**. היא מתאימה רק לביטויים שבהם המשתנה נמצא **במעריך**.

$$\int x^{2n+3} dx = \frac{x^{2n+4}}{2} + c \quad \text{X דרך לא נכונה:}$$

(שימוש X לא מתאים בתבנית הזאת $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$)

$$\int x^{2n+3} dx = \frac{x^{2n+4}}{2n+4} + c \quad \text{✓ כך נבצע לביטוי הזה אינטגרל בצורה נכונה:}$$

(שימוש ✓ מתאים בתבנית הזאת $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$)

שאלות

א.	ב.	ג.
$\int e^{2x+1} dx$	$\int 2e^{-3x} dx$	$\int 4e^{1-x} + e dx$
ד.	ה.	ו.
$\int e^3 - 2e^{-x} dx$	$\int e^x + x^2 + ex dx$	$\int e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{x^2} dx$
ז.	ח.	ט.
$\int (e^x)^2 dx$	$\int (e^x + 1)^2 dx$	$\int (e^x)^{\frac{1}{2}} dx$
י.	יא.	יב.
$\int (e^x + e^{-x})^2 dx$	$\int e^{\frac{x+1}{2}} - e^{-\frac{3x+1}{2}} dx$	$\int \sqrt{e^x} dx$
יג.	יד.	טו.
$\int \frac{e^x - 2}{e^x} + x^3 dx$	$\int \frac{e^{2x} - 5}{e^x} + 1 dx$	$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + 1 dx$
טז.		
$\int e^{\ln 2x} + e^3 dx$ ($x > 0$)		

תשובות

א.	ב.	ג.
$\frac{1}{2}e^{2x+1} + c$	$-\frac{2}{3}e^{-3x} + c$	$-4e^{1-x} + ex + c$
ד.	ה.	ו.
$e^3x + 2e^{-x} + c$	$e^x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{e}{2}x^2 + c$	$2e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{x} + c$
ז.	ח.	ט.
$\frac{1}{2}e^{2x} + c$	$\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + c$	$2e^{\frac{1}{2}x} + c$
י.	יא.	יב.
$\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$	$2e^{\frac{x+1}{2}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3x+1}{2}} + c$	$2e^{\frac{1}{2}x} + c$

אינטגרלים זיהוי נגזרת פנימית – תרגיל 2

$$\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$$

$n \neq -1$ האינטגרל נכון עבור כל

שאלות

א.

$$\int e^x(e^x + 1)^5 dx$$

ב.

$$\int e^{-2x}(e^{-2x} + 3)^4 dx$$

ג.

$$\int (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^n dx$$

ד.

$$\int (6 - 4e^{2x})(3x - e^{2x})^3 dx$$

תשובות

א.

$$\frac{1}{6}(e^x + 1)^6 + c$$

ב.

$$-\frac{1}{10}(e^{-2x} + 3)^5 + c$$

ג.

$$\frac{(e^x + e^{-x})^{n+1}}{n+1} + c$$

ד.

$$\frac{1}{2}(3x - e^{2x})^4 + c$$

אינטגרלים זיהוי נגזרת פנימית של המעריך – תרגיל 3

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

שאלות

א.

$$\int (2x - 1)e^{x^2 - x} dx$$

ב.

$$\int (x^2 - 2)e^{x^3 - 6x} dx$$

ג.

$$\int -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

ד.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

ה.

$$\int xe^{x^2} dx$$

ו.

$$\int \frac{f'(x)e^{\frac{2}{f(x)}}}{f^2(x)} dx$$

תשובות

א.	$e^{x^2-x} + c$	ב.	$\frac{1}{3}e^{x^3-6x} + c$
ג.	$e^{\frac{1}{x}} + c$	ד.	$2e^{\sqrt{x}} + c$
ה.	$\frac{1}{2}e^{x^2} + c$	ו.	$-e^{\frac{2}{f(x)}} + c$

אינטגרלים בפונקציות לוגריתמיות

פונקציה לוגריתמית אינטגרלים פשוטים – תרגיל 4

מקרה כללי:

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$$

(עבור $a \neq 0$)

מקרה פרטי:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

שאלות

א.	$\int \frac{1}{2x-1} dx$	ב.	$\int \frac{1}{1-x} + e^{-5x} + 1 dx$
ג.	$\int \frac{1}{x} - e dx$	ד.	$\int \frac{3}{x-1} dx$
ה.	$\int \frac{8}{x} - 1 dx$	ו.	$\int \frac{2x+1}{x} dx$
ז.	$\int \frac{2-x}{4-x^2} + e^{-5} dx$	ח.	$\int \frac{2x^2+x-6}{x^3} dx$

$\int \frac{2}{x+3} - \frac{4}{3x} dx$	י.	$\int \frac{1}{x^2} - \frac{5}{2x} dx$	ט.
$\int \frac{x+1}{x^2} dx$	יב.	$\int \frac{4-x^2}{x} dx$	יא.
$\int \frac{x+2}{3x^2+7x+2} dx$	יד.	$\int (2e^x + 3x) \frac{e^{-x}}{x} dx$	יג.
<u>תשובות</u>			
$-\ln 1-x - \frac{e^{-5x}}{5} + x + c$	ב.	$\frac{\ln 2x-1 }{2} + c$	א.
$3\ln x-1 + c$	ד.	$\ln x - ex + c$	ג.
$2x + \ln x + c$	ו.	$8\ln x - x + c$	ה.
$2\ln x - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + c$	ח.	$\ln x+2 + e^{-5x} + c$	ז.
$2\ln x+3 - \frac{4}{3}\ln x + c$	י.	$-\frac{1}{x} + \frac{5}{2}\ln x + c$	ט.
$\ln x - \frac{1}{x} + c$	יב.	$4\ln x - \frac{x^2}{2} + c$	יא.
$\frac{1}{3}\ln 3x+1 + c$	יד.	$2\ln x - 3e^{-x} + c$	יג.

פונקציה לוגריתמית אינטגרלים זיהוי נגזרת פנימית – תרגיל 5

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

שאלות

א.	$\int \frac{2x}{x^2 - 1} + x dx$	ב.	$\int \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{1 - x} + 1 dx$
ג.	$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$	ד.	$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$
ה.	$\int \frac{4x + 2}{x^2 + x} + \frac{5}{x} - 1 dx$	ו.	$\int \frac{x}{3x^2 + 1} dx$
ז.	$\int \frac{3x^3}{x^4 + 8} + \frac{\ln^2 x}{x} dx$	ח.	$\int \frac{1}{x \ln x} dx$
ט.	$\int \frac{3e^x + 1}{3e^x + x} dx$	י.	$\int \frac{\ln x - 2}{x} dx$
יא.	$\int \frac{(\ln x + 7)^2}{x} dx$	יב.	$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$
יג.	$\int \frac{2}{x \ln(x^3)} dx$	יד.	$\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$
טו.	$\int \frac{1}{3x \ln(x^5)} dx$	טז.	$\int \frac{1 - \ln x}{x \ln(x)} dx$
יז.	$\int \frac{4 \ln^3 x - \ln^2 x + 5 \ln x - 1}{x} dx$	יח.	$\int \frac{1}{(x - 1) \ln(x - 1)} dx$
יט.	$\int \frac{2}{x \ln^3 x} dx$	כ.	$\int \frac{4x \ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx$

תשובות

$\ln(1 + e^x) - \ln 1 - x + x + c$	ב.	$\ln x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + c$	א.
$\ln(e^x + e^{-x}) + c$	ד.	$\frac{1}{3}\ln x^3 + 1 + c$	ג.
$\frac{1}{6}\ln(3x^2 + 1) + c$	ו.	$2\ln x^2 + x + 5\ln x - x + c$	ה.
$\ln \ln x + c$	ח.	$\frac{3}{4}\ln(x^4 + 8) + \frac{\ln^3 x}{3} + c$	ז.
$\frac{(\ln x - 2)^2}{2} + c$ ו $\frac{(\ln x)^2}{2} - 2\ln x + c$	י.	$\ln 3e^x + x + c$	ט.
$\frac{\ln^4 x}{4} + c$	יב.	$\frac{(\ln x + 7)^3}{3} + c$	יא.
$-\frac{1}{\ln x} + c$	יד.	$\frac{2}{3}\ln \ln x + c$	יג.
$\ln \ln x - \ln x + c$	טו.	$\frac{1}{15}\ln \ln x + c$	טז.
$\ln \ln(x - 1) + c$	יח.	$\ln^4 x - \frac{\ln^3 x}{3} + \frac{5}{2}\ln^2 x - \ln x + c$	יז.
$\ln^2(x^2 + 1) + c$	כ.	$-\frac{1}{\ln^2 x} + c$	יט.

אינטגרלים מכל מיני סוגים – תרגיל 6

שאלות

א.	$\int 2x - 4e^x dx$	ב.	$\int \frac{9}{2x} - \frac{7}{5x^2} dx$
ג.	$\int \frac{e^{-2x} - 9}{e^{-x} + 3} + e^{-1} + x dx$	ד.	$\int x^2 e^{x^3} dx$
ה.	$\int \frac{1}{x \ln(3x)} dx$	ו.	$\int \frac{e^{2x} + 2}{e^x} dx$
ז.	$\int \frac{2x + 3}{x^2} dx$	ח.	$\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} dx$
ט.	$\int \left(\frac{5+x}{x}\right)^2 dx$	י.	$\int a e^{1-x} dx$
יא.	$\int \frac{e^2}{1-2x} dx$	יב.	$\int 3 + e^{\frac{x}{2}} dx$
יג.	$\int \frac{1}{x \ln(x^7)} dx$	יד.	$\int \frac{1}{7x \ln^4 x} dx$
טו.	$\int \frac{e^{2x} - 3}{(e^{2x} - 6x)^3} dx$	טז.	$\int \frac{e^{2x} - 3}{e^{2x} - 6x} dx$
יז.	$\int \frac{x + 3}{-2x^2 - 5x + 3} dx$	יח.	$\int \frac{4}{(x+4) \ln(x+4)} dx$
יט.	$\int \frac{e^{5x-3}}{e^x} dx$	כ.	$\int \frac{e^x \ln(e^x + 2)}{e^x + 2} dx$
כא.	$\int (e^{-3x} + e^{2x})^2 dx$	כב.	$\int \frac{2x^2 - 6x + 1}{x} dx$
כג.	$\int \frac{x}{3} + \frac{3}{x} dx$	כד.	$\int \frac{3 - 2x}{4x^2 - 9} dx$

תשובות

א.	$x^2 - 4e^x + c$	ב.	$\frac{9}{2} \ln x + \frac{7}{5x} + c$
ג.	$-e^{-x} - 3x + e^{-1}x + \frac{1}{2}x^2 + c$	ד.	$\frac{1}{3}e^{x^3} + c$
ה.	$\ln \ln 3x + c$	ו.	$x - \frac{1}{2e^{2x}} + c$
ז.	$2\ln x - \frac{3}{x} + c$	ח.	$-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}} + c$
ט.	$-\frac{25}{x} + 10\ln x + x + c$	י.	$-ae^{1-x} + c$
יא.	$-\frac{e^2 \ln 1 - 2x }{2} + c$	יב.	$3x + 2e^{\frac{x}{2}} + c$
יג.	$\frac{1}{7} \ln \ln x + c$	יד.	$-\frac{1}{21 \ln^3 x} + c$
טו.	$-\frac{1}{4(e^{2x} - 6x)^2} + c$	טז.	$\frac{1}{2} \ln e^{2x} - 6x + c$
יז.	$-\frac{1}{2} \ln -2x + 1 + c$	יח.	$4\ln \ln(x + 4) + c$
יט.	$\frac{1}{4}e^{4x-3} + c$	כ.	$\frac{\ln^2(e^x + 2)}{2} + c$
כא.	$-\frac{1}{6}e^{-6x} - e^{-x} + \frac{1}{4}e^{4x} + c$	כב.	$x^2 - 6x + \ln x + c$
כג.	$\frac{1}{6}x^2 + 3\ln x + c$	כד.	$-\frac{\ln 2x + 3 }{2} + c$

תנאים לשימוש	תבנית האינטגרל	
$n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	(1)
	$\int a dx = ax + c$	(2)
הביטוי שבסוגריים חייב להיות ליניארי (קו ישר) $n \neq -1$ $a \neq 0$	$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{(n+1)a} + c$	(3)
הביטוי שבסוגריים לא חייב להיות ליניארי (הוא יכול להיות כל ביטוי שתלוי ב- x) $n \neq -1$	$\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{(n+1)} + c$	(4)
הביטוי שבמעריך חייב להיות ליניארי (קו ישר) $m \neq 0$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$	(5)
הביטוי שבמעריך לא חייב להיות ליניארי (הוא יכול להיות כל ביטוי שתלוי ב- x)	$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$	(6)
	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	(7)
הביטוי שבתוך הלן חייב להיות ליניארי (קו ישר) $a \neq 0$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln ax+b }{a} + c$	(8)
הביטוי שבתוך הלן לא חייב להיות ליניארי (הוא יכול להיות כל ביטוי שתלוי ב- x) לא ניתן להמיר את המקרה הזה לתבנית הזאת: $\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{(n+1)} + c$ כי היא <u>לא מתאימה</u> לחזקה $n = -1$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$	(9)