

סדרה הנדסית

סדרה הנדסית היא סדרה של מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא קבועה. את המנה מסמנים באות q .

הערות:

- בסדרה הנדסית (בניגוד לסדרה חשבונית) אף איבר אינו שווה אפס כי אם אחד האיברים או יותר יהיה שווה לאפס אז נקבל לפחות מנה אחת שאינה מוגדרת (יהיה אפס במכנה).
- בסדרה הנדסית המנה אינה שווה אפס.

בדיוק כפי שלמדנו בסדרה חשבונית : את איברי הסדרה החשבונית מסמנים באופן הבא:
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ כאשר המספר הקטן שמופיע למטה מציין את מיקום האיבר בסדרה. כך למשל a_3 הוא האיבר במקום השלישי בסדרה a ובאופן יותר כללי:
 a_n הוא האיבר במקום ה- n בסדרה a .

דוגמאות לסדרה הנדסית

- המנה היא 3 $2, 6, 18, 54, \dots$
- המנה היא 2 $-3, -6, -12, -24, \dots$
- המנה היא 5 $1, 5, 25, 125, \dots$
- המנה היא -2 $5, -10, 20, -40, 80, \dots$

סדרה הנדסית עולה

סדרה הנדסית נקראת עולה אם כל איבר בסדרה (מלבד הראשון) גדול מקודמו. כדי שסדרה תעלה צריך להתקיים אחד מהתנאים הבאים כלומר תנאי 1 או תנאי 2:

1. $a_1 > 0$ וגם $q > 1$.
2. $a_1 < 0$ וגם $0 < q < 1$.

סדרה הנדסית יורדת

סדרה הנדסית נקראת יורדת אם כל איבר בסדרה (מלבד הראשון) קטן מקודמו. כדי שסדרה תרד צריך להתקיים אחד מהתנאים הבאים כלומר תנאי 1 או תנאי 2:

1. $a_1 > 0$ וגם $0 < q < 1$.
2. $a_1 < 0$ וגם $q > 1$.

סדרה הנדסית שאינה עולה ואינה יורדת

סדרה הנדסית נקראת "אינה עולה ואינה יורדת" כאשר $q < 0$.

סדרה הנדסית קבועה

סדרה הנדסית נקראת קבועה אם $q = 1$ (וזה אומר שכל איברי הסדרה זהים).

הנוסחה לאיבר כללי של סדרה הנדסית היא:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

n - מיקום האיבר

a_n - ערכו של האיבר במקום n

a_1 - האיבר הראשון

q - מנת הסדרה

תרגילים- נוסחה לאיבר כללי

1. נתונה הסדרה ההנדסית $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$ מצא את:
 - א. האיבר החמישי.
 - ב. האיבר במקום ה-21.
 - ג. האיבר השני.
2. נתונה הסדרה ההנדסית $2, 6, 18, \dots$ מצא את:
 - א. האיבר השביעי.
 - ב. האיבר השלישי.
3. נתונה הסדרה ההנדסית $20, 10, 5, \dots$ מצא את האיבר העשירי.
4. נתונה הסדרה ההנדסית $-1, 5, -25, \dots$ מצא את האיבר השישי.
5. בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 243 והאיבר הראשון הוא 1024. מצא את מנת הסדרה.
6. בסדרה הנדסית האיבר השביעי גדול פי 32 מהאיבר השני. מצא את מנת הסדרה.
7. נתונה סדרה הנדסית עולה. אם נכפיל את האיבר השמיני ב-729 נקבל את האיבר השני.
 - א. מצא את מנת הסדרה.
 - ב. האם האיבר הראשון בסדרה חיובי או שלילי.
8. אילו 4 מספרים יש להכניס בין המספרים 3 ו-375, 9- כדי ש-6 המספרים שהתקבלו יהוו סדרה הנדסית.
9. נתונה סדרה הנדסית שבה $a_3 = -7$ ו- $a_6 = 56$. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
10. בסדרה הנדסית סכום שני האיברים הראשונים הוא 9 וסכום האיברים הרביעי והחמישי הוא 72. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
11. בסדרה הנדסית האיבר השלישי גדול ב-30 מהאיבר הראשון והאיבר הרביעי בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
12. בסדרה הנדסית האיבר השני גדול ב-10 מהאיבר הראשון והאיבר הרביעי בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה. (מצא את 2 האפשרויות).
13. בסדרה הנדסית סכום שני האיברים הראשונים הוא 10 והאיבר השלישי הוא -72. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה. (מצא את 2 האפשרויות).

14. בסדרה הנדסית יורדת סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 57 והאיבר השלישי קטן ב-15 מהאיבר הראשון. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

15. בסדרה הנדסית יורדת האיבר השני קטן ב-405 מהאיבר הראשון. ההפרש בין האיבר הראשון לשלישי קטן ב-135 מהאיבר השני. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

16. בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הראשון הוא 45 וסכומם של האיבר השני ורביעי הוא 30. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה. (מצא את שתי האפשרויות).

17. בסדרה הנדסית שכל איבריה חיוביים מכפלת האיבר העשירי והשני היא 100. מצא את האיבר השישי.

18. בסדרה הנדסית שכל איבריה שליליים מכפלת האיבר החמישי והשלישי היא 49. מצא את האיבר הרביעי.

19. בסדרה הנדסית סכום שני האיברים הראשונים הוא 7.5 ומכפלת שלושת האיברים הראשונים היא 125. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

20. בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר הראשון לשביעי הוא 665 וההפרש בין הראשון לרביעי הוא 513. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

תשובות

1. א. $a_5 = 2$

ב. $a_{21} = 131,072$

ג. $a_2 = \frac{1}{4}$

2. א. $a_7 = 1,458$

ב. $a_3 = 18$

3. $a_{10} = \frac{5}{128}$

4. $a_6 = 3,125$

5. $q = \frac{3}{4}$

6. $q = 2$

7. א. $q = \frac{1}{3}$

ב. $a_1 < 0$

8. א. $a_2 = -15, a_3 = 75, a_4 = -375, a_5 = 1,875$

9. $a_1 = \frac{-7}{4} = -1\frac{3}{4} \quad q = -2$

10. $a_1 = 3 \quad q = 2$

11. $a_1 = 2 \quad q = 4$

12. $a_1 = -2 \quad q = -4$ או $a_1 = 5 \quad q = 3$

$$a_1 = -2 \quad q = -6 \quad \text{או} \quad a_1 = -50 \quad q = -\frac{6}{5}.13$$

$$a_1 = 27 \quad q = \frac{2}{3}.14$$

$$a_1 = 1,215 \quad q = \frac{2}{3}.15$$

$$a_1 = 3 \quad q = 2 \quad \text{או} \quad a_1 = -48 \quad q = -\frac{1}{2}.16$$

$$a_6 = 10.17$$

$$a_4 = -7.18$$

$$a_1 = 2\frac{1}{2} \quad q = 2.19$$

$$a_1 = 729 \quad q = \frac{2}{3}.20$$

2 דרכים להציג סדרה הנדסית

אפשר להציג סדרה הנדסית בשתי דרכים:

- i. נוסחה לפי מקום:
נציב בנוסחה לאיבר כללי ($a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$) את a_1 ואת q . כך שנקבל ביטוי המובע באמצעות n .
- ii. כלל נסיגה:
בסדרה הנדסית a_n שמנתה היא q והאיבר הראשון שלה הוא k כלל הנסיגה הוא:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \cdot q \\ a_1 = k \end{cases}$$

שאלות

1. נתונה הסדרה ההנדסית $3, \dots, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$. הגדר את הסדרה באמצעות כלל נסיגה ובאמצעות נוסחה לפי מקום.
2. נתונה הסדרה ההנדסית $-3, 12, -48, \dots$. הגדר את הסדרה באמצעות כלל נסיגה ובאמצעות נוסחה לפי מקום.

תשובות

1. הגדרה לפי כלל נסיגה: $a_{n+1} = 2a_n$ $a_1 = \frac{3}{4}$
הגדרה לפי מקום: $a_n = \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1}$
2. הגדרה לפי כלל נסיגה: $a_{n+1} = -4a_n$ $a_1 = -3$
הגדרה לפי מקום: $a_n = -3 \cdot (-4)^{n-1}$

לפני שאתם עוברים על הפרק הזה חשוב מאוד שתעברו קודם על הפרק של "הוכחת סדרה חשבונית"

כדי להוכיח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית צריך להראות שהמנה בין כל שני איברים סמוכים בסדרה b_n היא קבועה. כלומר בתרגילים בהם אתם נדרשים להוכיח שסדרה (נניח הסדרה b_n) היא הנדסית צריך גם להראות ש:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = n - b$$

ומיד אחרי לרשום "הראינו שהמנה בין כל שני איברים סמוכים היא קבועה ולכן הסדרה היא הנדסית".

1. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k$ ובה k איברים. נסמן את מנתה ב- q .
 בונים סדרה חדשה באמצעות איברי הסדרה המקורית באופן הבא:
 $b_1 = a_1 + a_2 + a_3, b_2 = a_2 + a_3 + a_4, b_3 = a_3 + a_4 + a_5 \dots$
 א. הבע את האיבר במקום ה- n בסדרה החדשה באמצעות איברי הסדרה המקורית.
 ב. הוכח שהסדרה החדשה b_n היא סדרה הנדסית והבע את מנתה באמצעות q (מנת הסדרה המקורית).
2. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k$ ובה k איברים. נסמן את מנתה ב- q .
 בונים סדרה חדשה באמצעות איברי הסדרה המקורית באופן הבא:
 $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4 \dots$
 א. הבע את האיבר במקום ה- n בסדרה החדשה באמצעות איברי הסדרה המקורית.
 ב. הוכח שהסדרה החדשה b_n היא סדרה הנדסית והבע את מנתה באמצעות q (מנת הסדרה המקורית).
3. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k$ ובה k איברים. נסמן את מנתה ב- q .
 בונים סדרה חדשה באמצעות איברי הסדרה המקורית באופן הבא:
 $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_3 + a_4, b_3 = a_5 + a_6 \dots$
 א. הבע את האיבר במקום ה- n בסדרה החדשה באמצעות איברי הסדרה המקורית.
 ב. הוכח שהסדרה החדשה b_n היא סדרה הנדסית והבע את מנתה באמצעות q (מנת הסדרה המקורית).
4. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k$ ובה k איברים. נסמן את מנתה ב- q .
 בונים סדרה חדשה באמצעות איברי הסדרה המקורית באופן הבא:
 $b_1 = (a_1)^2, b_2 = (a_2)^2, b_3 = (a_3)^2 \dots$
 א. הבע את האיבר במקום ה- n בסדרה החדשה באמצעות איברי הסדרה המקורית.
 ב. הוכח שהסדרה החדשה b_n היא סדרה הנדסית והבע את מנתה באמצעות q (מנת הסדרה המקורית).
5. נתונות שתי סדרות $a_n = 3 \cdot 2^{2n-1}$ ו- $b_n = 3 \cdot 2^{n^2}$. הוכח שאחת מהן הנדסית ואחת אינה הנדסית.

תשובות

1. א. $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$

2. א. $b_n = a_n + a_{n+1}$

ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$

3. א. $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$

ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$

4. א. $b_n = (a_n)^2$

ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$

5. b_n אינה סידרה הנדסית

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$$

מציאת המקום הסידורי

כאשר נגיע למשוואה $a^x = b$ שבה הנעלם נמצא בחזקה והפרמטרים a ו- b ידועים נעזר במחשבון בכפתור הלוג כדי למצוא את הנעלם שנמצא בחזקה (במקרה הזה את x).

$$x = \log_a b$$

שאלות

1. מצא את מספר האיברים בסדרה ההנדסית 7,14,...,224.

2. מצא את מספר האיברים בסדרה ההנדסית 3,15,...,9375.

3. נתונה הסדרה ההנדסית: $3^{-5}, 3^{-7}, \dots$ מצא את מיקומו הסידורי של האיבר שערכו 3^{-21} .

4. מצא בסדרה ההנדסית 2,6,... את המיקום הסידורי של שני איברים סמוכים שסכומם 17,496.

5. מצא את מספר האיברים בסדרה ההנדסית $3, 3\sqrt{3}, 9, \dots, 6561$.

6. נתונה הסדרה ההנדסית: $5, -10, \dots$ מצא את מיקומו הסידורי של האיבר שערכו 1280.

תשובות

1. $n = 6$

2. $n = 6$

3. $n = 9 \quad a_9 = 3^{-21}$

4. $a_8 + a_9$

5. $n = 15$

6. $n = 9$

סכום סדרה הנדסית
הנוסחה לסכום סדרה הנדסית היא:

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

n - מספר האיברים שאנחנו סוכמים
 a_1 - האיבר הראשון בחלק של הסדרה
 אותו אנחנו סוכמים.
 q - מנת הסדרה שאותה אנחנו סוכמים

הערה: הנוסחה נכונה עבור $q \neq 1$. אם $q = 1$, כלומר אם הסדרה קבועה פשוט נכפיל את האיבר הראשון (או כל איבר אחר-כי כולם זהים) במספר האיברים. $s_n = n \cdot a_1$

שאלות

1. נתונה הסדרה ההנדסית $3, -12, 48, \dots$ מצא את סכום עשרת האיברים החל מהאיבר ה-6 (כולל).
2. בסדרה הנדסית יש 7 איברים. ערכו של האיבר הראשון הוא 5 וערכו של האיבר האחרון הוא 320. מצא את סכום כל איברי הסדרה. (נתון שהסדרה עולה).
3. נתונה הסדרה ההנדסית $\dots, 4374, 2916$ מצא את סכום 8 האיברים הראשונים.
4. בסדרה ההנדסית $\dots, -6, 12$ סכום כל איברי הסדרה הוא -1026 . מצא את מספר איברי הסדרה.

תשובות

1. $644,244,480 = s_{10}$ החל מהאיבר השישי
2. 635
3. 12,610
4. $n = 9$

מקומות זוגיים ומקומות אי זוגיים

תכונות סדרת האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים וסדרת האיברים הנמצאים במקומות האי זוגיים:
 זהו סיכום בלבד אך הוא מוסבר בסרטונים כך שאין צורך להבין אותו לבד

סדרת האיברים במקומות האי-זוגיים	סדרת האיברים במקומות הזוגיים	
האיבר הראשון של הסדרה המקורית	האיבר השני של הסדרה המקורית	איבר ראשון
מנת הסדרה המקורית בריבוע	מנת הסדרה המקורית בריבוע	מנה
חצי ממספר איברי הסדרה המקורית	חצי ממספר איברי הסדרה המקורית	מספר איברים (במידה ובסדרה המקורית יש מספר זוגי של איברים)
$\frac{1 + \text{מספר איברי המקורית}}{2} = \text{מספר האיברים}$	$\frac{1 - \text{מספר איברי המקורית}}{2} = \text{מספר האיברים}$	מספר איברים (במידה ובסדרה המקורית יש מספר אי זוגי של איברים)

שאלות

1. נתונה הסדרה ההנדסית $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \dots, 3280\frac{1}{2}$ מצא את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

2. נתונה הסדרה ההנדסית $524288, \dots, -2, \frac{1}{2}$, מצא את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים.
3. בסדרה הנדסית יש 12 איברים. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא 316407 וסכום כל איברי הסדרה הוא 527345. מצא בסדרה את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
4. בסדרה הנדסית יש 10 איברים. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא $-4,069,010$ וסכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 813,802. מצא בסדרה את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
5. בסדרה הנדסית יש 16 איברים. סכום הסדרה גדול פי $1\frac{1}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים. מצא את היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים לבין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים. (נתון: מנת הסדרה לא שווה 1 או -1).
6. בסדרה הנדסית יש מספר זוגי של איברים. סכום הסדרה הוא 255 וסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא 170. מצא את מנת הסדרה.

תשובות

1. $s = 1,230\frac{1}{6}$ סכום במקומות האי-זוגיים
- $s = 3,690\frac{1}{2}$ סכום במקומות הזוגיים
2. $s = 559,240\frac{1}{2}$ סכום במקומות האי-זוגיים
- $s = -139,810$ סכום במקומות הזוגיים
3. $a_1 = 2,048 \quad q = 1\frac{1}{2}$
4. $a_1 = 2 \quad q = -5$
5. $q = 3 \quad \frac{s_{\text{זוגיים}}}{s_{\text{אי-זוגיים}}} = 3$
6. $q = \frac{1}{2}$

שינוי הסימנים של האיברים במקומות זוגיים או במקומות האי זוגיים

- שינוי הסימנים של האיברים במקומות הזוגיים: הכפלת כל איברי הסדרה הנמצאים במקומות הזוגיים במינוס אחד.
- שינוי הסימנים של האיברים במקומות האי-זוגיים: הכפלת כל איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים במינוס אחד

בכל אחד מהמקרים הנ"ל נקבל סדרה הנדסית חדשה אשר מנתה היא $-q$ (כאשר q היא מנת הסדרה המקורית).

שאלות

1. בסדרה הנדסית שמנתה 2 יש 12 איברים. ידוע כי אם הופכים את הסימנים של כל האיברים במקומות הזוגיים מתקבלת סדרה שסכומה קטן ב-2730 מסכום הסדרה המקורית. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

2. בסדרה הנדסית יש 10 איברים. סכום הסדרה הוא 14762. ידוע כי אם הופכים את הסימנים של כל האיברים במקומות הזוגיים מתקבלת סדרה שסכומה -29524. מצא בסדרה המקורית את האיבר הראשון ואת המנה.

3. נתונה סדרה הנדסית ובה $2n$ איברים (n מספר טבעי): $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$.
נסמן:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots a_{2n-1} + a_{2n}$$
$$S_2 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

מצא את מנת הסדרה המקורית אם ידוע ש- $\frac{S_1}{S_2} = 5$.

4. נתונה סדרה הנדסית ובה מספר זוגי של איברים. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא 316407 וסכום הסדרה לאחר החלפת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא -105469. מצא את מנת הסדרה המקורית. (נתון: מנת הסדרה לא שווה 1 או -1).

תשובות

1. $a_1 = \frac{1}{2}$

2. $q = -3$ $a_1 = -1$

3. $q = \frac{2}{3}$

4. $q = \frac{3}{2}$

סכום ריבועי האיברים

כאשר אנו לוקחים סדרה הנדסית ומעלים את איברי הסדרה בריבוע מתקבלת סדרה הנדסית חדשה שמנתה שווה למנת הסדרה המקורית בריבוע.

שאלות

1. בסדרה הנדסית שבה 14 איברים האיבר הראשון הוא 3. סכום איברי כל הסדרה גדול פי $1\frac{1}{3}$ מסכום הריבועים של 7 האיברים הראשונים. מצא את מנת הסדרה.
2. בסדרה הנדסית יש $2n$ איברים (n מספר טבעי). נתון שסכום ריבועי n האיברים הראשונים גדול פי 1.5 מסכום n האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים. סכום שני האיברים הראשונים בסדרה הוא 9. מצא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון שלה. (מצא את 2 האפשרויות)

תשובות

$$1. \quad q = 3$$

$$2. \quad q = -3 \quad a_1 = -4\frac{1}{2} \quad \text{או} \quad q = 2 \quad a_1 = 3$$

הקשר בין נוסחת הסכום לבין הנוסחה לאיבר כללי

בדיוק כמו בסדרה חשבונית הקשר בין נוסחת הסכום לנוסחה לאיבר כללי הוא: $a_n = S_n - S_{n-1}$ והוא נכון עבור $n > 1$.

$$1. \quad \text{נתונה סדרה שנוסחת הסכום שלה היא } S_n = 4 \cdot 3^n - 4.$$

א. מצא את 3 האיברים הראשונים.

ב. מצא את הנוסחה לאיבר כללי ובדוק את נכונותה עבור $n = 1$.

$$2. \quad \text{נתונה סדרה שנוסחת הסכום שלה היא } S_n = 4 \cdot 3^n - 2.$$

א. מצא את 3 האיברים הראשונים.

ב. מצא את הנוסחה לאיבר כללי עבור $n \geq 2$.

ג. האם הנוסחה שמצאת בסעיף ב נכונה גם עבור $n = 1$?

$$3. \quad \text{נתונה סדרה שנוסחת הסכום שלה היא } S_n = 3 \cdot 2^{n+1} + c.$$

א. מצא את הנוסחה לאיבר כללי עבור $n \geq 2$.

ב. הוכח שהסדרה היא הנדסית עבור $n \geq 2$.

ג. מצא את c עבורו כל הסדרה הנדסית.

תשובות

$$1. \quad a_1 = 8 \quad a_2 = 24 \quad a_3 = 72$$

$$\text{נכון עבור } n \geq 1 \quad a_n = 8 \cdot 3^{n-1}$$

$$2. \quad a_1 = 10 \quad a_2 = 24 \quad a_3 = 72$$

$$\text{נכון עבור } n \geq 2 \quad a_n = 8 \cdot 3^{n-1}$$

$$3. \quad \text{א. } a_n = 3 \cdot 2^n$$

$$\text{ב. } q = 2$$

$$\text{ג. } c = -6$$

שאלות שונות

1. נתונה סדרה הנדסית ובה n איברים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$. נסמן את מנתה ב- q .
 - א. בין כל שני איברים סמוכים הכניסו איבר 1 כך שהסדרה החדשה שנוצרה גם היא סדרה הנדסית. הבע באמצעות q את מנת הסדרה החדשה. (הבע את שתי האפשרויות).
 - ב. בין כל שני איברים סמוכים הכניסו 2 איברים כך שהסדרה החדשה שנוצרה גם היא סדרה הנדסית. הבע באמצעות q את מנת הסדרה החדשה.
 - ג. בין כל שני איברים סמוכים הכניסו k איברים כך שהסדרה החדשה שנוצרה גם היא סדרה הנדסית. הבע באמצעות q ו- k את מנת הסדרה החדשה (הבע את 2 האפשרויות אם יש צורך). בנוסף, הבע את מספר איברי הסדרה החדשה באמצעות n ו- k .

1. תשובה:

א. $\pm\sqrt{q}$

ב. $\sqrt[3]{q}$

ג. עבור k אי זוגי $\pm\sqrt[k+1]{q}$

עבור k זוגי $\sqrt[k+1]{q}$.

מספר איברי הסדרה החדשה הוא $n + (n-1)k$.

סדרה הנדסית מתכנסת ותכונות התכנסות הסכום של אינסוף איבריה.

- סדרה הנדסית מתכנסת:
- סדרה הנדסית שמנתה q נקראת **סדרה הנדסית מתכנסת** אם היא מקיימת: $-1 < q < 1, (q \neq 0)$.
- הסכום של אינסוף איברי סדרה הנדסית מתכנסת, מתכנס לביטוי: $\frac{a_1}{1-q}$.
- אם כן, כל פעם שנתבקש למצוא סכום של אינסוף איברי סדרה הנדסית מתכנסת נשתמש בנוסחה $S = \frac{a_1}{1-q}$.
- אם לעומת זאת נרצה לסכום רק חלק מהסדרה (כלומר מספר סופי של איברים)
- $$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$
- אז נשתמש בנוסחה
- *חשוב- אם נתון שסכום של סדרה הנדסית הוא סופי- אז ניתן להסיק שהסדרה מתכנסת.

שאלות

1. נתונה הסדרה ההנדסית **האינסופית** הבאה: $162, 54, 18, \dots$.
 - א. מצא את סכום הסדרה.
 - ב. מצא את סכום 5 האיברים הראשונים.
 - ג. מצא את האיבר העשירי.
2. נתונה הסדרה ההנדסית **האינסופית** הבאה: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$.
 - א. מצא את סכום הסדרה.
 - ב. מצא את סכום 6 האיברים הראשונים.
 - ג. מצא את סכום אינסוף האיברים של הסדרה החל מהאיבר הרביעי.

3. נתונה הסדרה ההנדסית **האינסופית** הבאה: $9, 0.9, 0.09, \dots$.
- מצא את סכום הסדרה.
 - מצא את סכום אינסוף איברי הסדרה החל מהאיבר ה-3.
 - מצא סכום של 10 איברים החל מהאיבר ה-5. בתשובתכם דייקו ורשמו את כל המספר העשרוני הארוך (14 ספרות סה"כ!)
4. נתונה סדרה הנדסית אינסופית שמנתה 0.2 וסכומה 35. מצא את האיבר הראשון של הסדרה.
5. האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 4 וסכום כל איברי הסדרה הוא 5.
- ציין 2 סיבות מדוע אפשר להסיק מהנתונים שהסדרה היא מתכנסת (ללא חישובים- כלומר הסבר איכותי ולא כמותי).
 - מצא את מנת הסדרה (בעזרת חישוב מתאים).
6. בסדרה הנדסית אינסופית סכום כל איברי הסדרה גדול פי $6\frac{1}{4}$ מהאיבר ה-2. סכום שני האיברים הראשונים הוא 18. מצא את האיבר הראשון של הסדרה. (מצא את 2 האפשרויות).
7. בסדרה הנדסית אינסופית סכום כל איברי הסדרה הוא 26,244 וסכום איברי הסדרה החל מהאיבר ה-9 הוא 4. מצא את האיבר הראשון אם ידוע הסדרה יורדת.
8. בסדרה הנדסית אינסופית סכום כל איברי הסדרה הוא 243 וסכום חמשת האיברים הראשונים הוא 242. מצא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.
9. בסדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ סכום כל האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 2 מצא את האיבר הראשון.
10. נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת. נתון שסכום האיברים העומדים במקומות האי זוגיים קטן פי 3 מסכום ריבועי איברי כל הסדרה. מצא את האיבר הראשון.

11. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3 \dots$ אינסופית שמנתה q . נתון:

$$\begin{aligned} a_3 + a_6 + a_9 \dots &= 4 \\ a_2 + a_5 + a_8 \dots &= 10 \\ \text{מצא את } q \end{aligned}$$

12. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3 \dots$ אינסופית מתכנסת שמנתה q . נסמן:

$$\begin{aligned} T &= a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} \dots \\ S &= a_2 - a_4 + a_6 - a_8 \dots \\ \frac{T}{S} &= \frac{2}{3} \text{ ש-} q \text{ אם נתון ש-} \end{aligned}$$

תשובות

1. א. $s = 243$

ב. $s_5 = 242$

ג. $a_{10} = \frac{2}{243}$

2. א. $s = \frac{1}{3}$

ב. $s_6 = \frac{21}{64}$

ג. $s = -\frac{1}{24}$ החל מהאיבר הרביעי

3. א. $s = 10$

ב. $s = \frac{1}{10}$ החל מהאיבר השלישי

ג. 0.0009999999999

4. $a_1 = 28$

5. א. $0 < q < 1$ ו $a_1 > 0$ ובנוסף סדרה אינסופית יורדת לחילופין

סדרה אינסופית עם סכום סופי.

ב. $q = \frac{1}{5}$

6. $a_1 = 10$ $q = \frac{4}{5}$ או $a_1 = 15$ $q = \frac{1}{5}$

7. $a_1 = 17,496$

8. $a_1 = 162$ $q = \frac{1}{3}$

9. $a_1 = 7\frac{1}{2}$

10. $a_1 = 3$

11. $q = \frac{2}{5}$

12. $q = \frac{1}{2}$