

מתכונת 581

פרק ראשון - אלגברה והסתברות (40 נק')
 ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נק')

1. אוטובוס ומשאית יצאו בשעה 9:00 מהנקודות A ו-B בהתאמה, האחד לקראת השנייה. מהירות האוטובוס $2v$ ומהירות המשאית $3v$. הם נפגשים לראשונה בנקודה C וממנה האוטובוס ממשיך לנקודה B והמשאית ממשיכה לנקודה A. כאשר כל רכב מגיע ליעדו, הוא מסתובב וחוזר לנקודה ממנה יצא. השניים נפגשים שנית בנקודה D.
- א. חשב את היחס בין אורכי הקטעים $\frac{AC}{BD}$.
- ב. נתון שבין שתי הפגישות חלפו 36 דקות. מצא באיזו שעה הגיע כל רכב בחזרה לנקודת מוצאו.
- ג. בזמן שחלף מאז פגישתם בנקודה C ועד הגעת האוטובוס לנקודה B, המרחק המקסימלי בין שני הרכבים היה 40 ק"מ. חשב את אורך הקטע AB.

2. בסדרה הכללית a_n , סכום n האיברים הראשונים נתון בנוסחה: $S_n = 3p \cdot 2^{n+1} - 6p$.

א. הוכח שהסדרה a_n היא הנדסית והבע באמצעות n ו- p את האיבר הכללי a_n .

ב. נתונה סדרה הנדסית נוספת שבה האיבר הכללי הוא $b_n = p \cdot 3^n$.

הגדירו סדרה חדשה: $C_n = 2^n \cdot b_n - 3^n \cdot a_n$.

1. קבע האם הסדרה C_n היא הנדסית או שאינה הנדסית.

2. S_k הוא סכום k האיברים הראשונים בסדרה C_n . הבע את S_k באמצעות p ו- k .

3. עבור כל טענה קבע האם היא נכונה או שגויה. נמק את תשובתך.

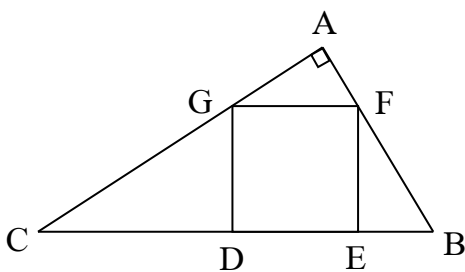
i. אם $0 < S_k$ אז $a_{n+1} < a_n$.

ii. יתכן שקיים מספר שהוא איבר בסדרה a_n וגם איבר בסדרה b_n .

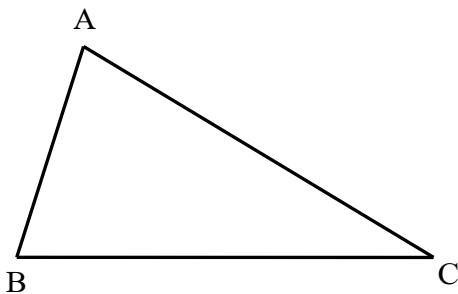
3. צוות רפואי אוסף כלבים וחתולים ובודק אם הם בריאים או חולים. מחצית מהנבדקים נמצאו בריאים. נסמן ב- p את ההסתברות לבחור מבין כלל הנבדקים חתול שנמצא בריא. ההסתברות לבחור כלב מבין כלל הנבדקים שווה להסתברות לבחור מבין כלל הנבדקים חתול בריא או בעל חיים חולה כלשהו.
- א. לפניך 4 טענות. קבע איזו מהטענות הבאות היא נכונה ונמק:
- יתכן שמספר החתולים שנבדקו גדול ממספר הכלבים שנמצאו בריאים.
 - יתכן ש: $p = 0.2$.
 - יתכן שההסתברות לבחור כלב בריא מבין כלל הכלבים היא: $\frac{1}{9}$.
 - יתכן שסך הכל נבדקו 65 בעלי חיים.
- ב. עדי בוחר באקראי בעל חיים שנבדק, מלטף אותו ומחזיר אותו לאחריים. הוא מבצע את התהליך 4 פעמים. יתכן שליטף את אותו בעל חיים מספר פעמים. ההסתברות שמחצית מבעלי החיים שליטף הם כלבים היא 0.3456. מה ההסתברות לבחור חתול חולה מבין כלל החתולים שנבדקו?
- ג. מיכל בוחרת באקראי חתול שנבדק, מלטפת ומחזירה אותו לאחריים. היא מבצעת את התהליך 4 פעמים. ידוע שרק חלק מהחתולים שליטפה בריאים. חשב את ההסתברות שרובם בריאים.

פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נק')
ענה על אחת מהשאלות מהשאלות 4-5 (לכל שאלה 20 נק')

4. במשולש $\triangle ABC$ ישר הזווית כלוא הריבוע $DEFG$ כמתואר בשרטוט.



- הוכח: $FG^2 = CD \cdot BE$.
- שטח הריבוע $DEFG$ הוא 144 סמ"ר.
- שטח המשולש $\triangle CDF$ גדול פי $\frac{16}{9}$ משטח המשולש $\triangle BEG$.
- חשב את היקף הטרפז $BCGF$.
- עבור הטרפז $BCGF$ קבע האם ניתן:
 - לחסום אותו במעגל. נמק.
 - לחסום מעגל בתוכו. נמק.



5. במשולש $\triangle ABC$ נתון: $AC = 2m$, $AB = m$. נסמן: $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$.
- הבע באמצעות m ו- α את אורך הצלע BC .
 - קבע האם יתכן שהיקף המשולש $\triangle ABC$ יהיה קטן מ- $4m$. נמק את תשובתך.
 - הבע באמצעות α את ערכו של $\cos \beta$.
 - נתון: $\cos \beta = 0.25$. מבלי למצוא את הזווית α ו- β , הבע באמצעות m את שטח המשולש $\triangle ABC$.

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות שורש, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות (40 נק')
 ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נק')

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$.

- א. קבע האם הפונקציה $f(x)$ זוגית, אי זוגית או שאינה זוגית ואינה אי זוגית.
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$.
- ג. הסבר מדוע הפונקציה $f(x)$ היא אי שלילית בתחום הנתון.

ד. הראה שחלק מהנקודות על גרף הפונקציה $f(x)$ שעבורן $f'(x) = 0$ מקיימות: $\tan x = \frac{2}{x}$.

ה. נתונים הגרפים של הפונקציות: $g(x) = \frac{2}{x}$ ו: $h(x) = \tan x$ בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$.

קבע כמה פתרונות בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$ יש למשוואה $f'(x) = 0$.

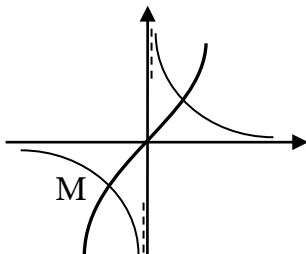
ו. הגרפים של הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ נחתכים, בין היתר,

בנקודה M ששיעור ה- y שלה הוא -1.858 .

ענה על הסעיפים הבאים עבור התחום: $-0.5\pi \leq x \leq 0.5\pi$

1. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$.

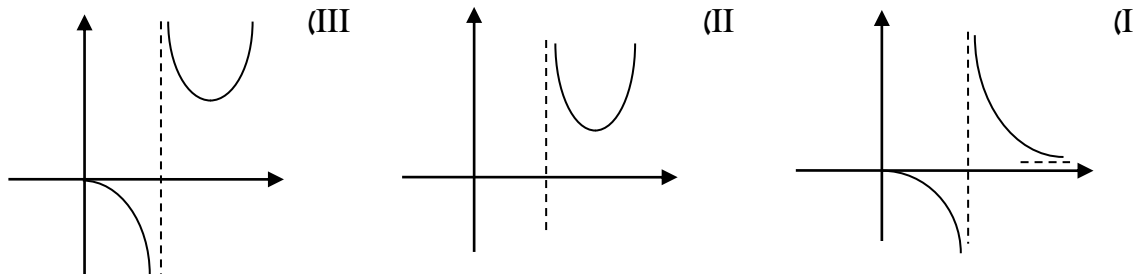
2. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.



7. נתונות פונקציה 1: $y = \frac{x+1}{\sqrt{2x-2}}$, פונקציה 2: $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, פונקציה 3: $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.

ב. נתונות הסקיצות של שלוש הפונקציות. קבע איזה גרף מתאים לכל אחת מהפונקציות:



ג. הגדירו את הפונקציות: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x-2}} + a$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} + b$.

כאשר משרטטים את הסקיצות של שלוש הפונקציות על אותה מערכת צירים, הישר $y = k$ עובר

דרך נקודות קיצון של שלוש הפונקציות. מצא את a ואת b (הבחן בין שני מקרים).

ד. בסעיף ד' בחר בערכי a ו- b הגבוהים יותר מבין אלו שמצאת.

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או שגויה. נמק את תשובתך.

i. למשוואה $g(x) = k + 1$ יש יותר פתרונות מהמשוואה $h(x) = 2k$.

ii. בהכרח מתקיים: $8 < \int_2^4 h(x) dx$.

8. הנקודות B ו-E נמצאות בהתאמה על הצלעות AC ו-AD במשולש $\triangle ACD$. נסמן: $BC = x$,

$\angle CAD = \alpha$. נתון: $AE = 2BC$, $DE = AB = 3BC$. שטח המרובע BCDE הוא 35 סמ"ר.

א. הבע באמצעות x את $\sin \alpha$.

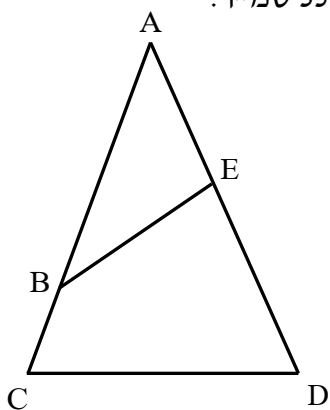
ב. נתון: הזווית α היא חדה. הוכח: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{x^4 - 25}}{x^2}$.

ג. הבע באמצעות x את ערך הביטוי BE^2 .

ד. מצא עבור איזה ערך של x יהיה ערך הביטוי BE^2 מינימלי.

ה. נתון שכאשר הביטוי BE^2 מינימלי גם אורך הקטע BE מינימלי.

מצא את הערך המינימלי של הקטע BE.



בהצלחה!

תשובות:

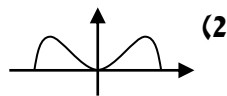
- (1) א. 2. ב. האוטובוס ב- 10:30, המשאית ב- 10:00. ג. 60 ק"מ.
 (2) א. $a_n = 3p \cdot 2^n$ או $a_n = 6p \cdot 2^{n-1}$. ב. 1. הנדסית. (2) $S_k = -\frac{12p \cdot (6^k - 1)}{5}$. (3) i נכונה. ii שגויה.

(3) א. טענה ii. ב. 0.75. ג. 0.069.

(4) ב. 84 ס"מ. ג. 1. לא. (2) לא.

(5) א. $BC = m \cdot \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$. ב. לא יתכן. ג. $\frac{1 - 2 \cos \alpha}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}$. ד. $\frac{\sqrt{15} \cdot m^2}{4}$.

- (6) א. א. זוגית. ב. $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), (0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. ה. שלושה. ג. 1. $x = -1.076, x = 1.076, x = 0$.



- (7) א. פונקציה 1: $1 < x$; פונקציה 2: $1 < x$ או $0 \leq x < 1$; פונקציה 3: $1 < x$ או $0 \leq x < 1$.
 ב. גרף I: פונקציה 3; גרף II: פונקציה 1; גרף III: פונקציה 2.
 ג. עבור $k = 0$: $a = -2, b = 0$; עבור $k = 4$: $a = 2, b = 4$.
 ד. i נכונה. ii נכונה.

(8) א. $\sin \alpha = \frac{5}{x^2}$. ג. $BE^2 = 13x^2 - 12\sqrt{x^4 - 25}$. ד. $x = \sqrt{13}$. ה. 5 ס"מ.