דוגמאות לשאלות דמויות בגרות

שאלון 035581

פתרונות ומדריך למורה

לכיתה י"א – 5 יח"ל

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

פתרונות ומדריך למורה
לשאלות לתרגול שאלון 581, י"א 5 יחידות

1. **סדרות**

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ מוגדרת על- ידי כלל הנסיגה (n מספר טבעי):

$$\begin{cases} S_1 = 9 \\ S_{n+1} = S_n - 7n + 9 \end{cases}$$

כאשר : $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

הסדרה מוגדרת באמצעות כלל נסיגה שאינו שגרתי. כלל הנסיגה הזה מזמן הסתכלות על תבניות, או במילים אחרות, קריאה מושכלת של הנתונים.
גם לפתרון סעיף ב נדרש זיהוי תבנית. התלמיד נדרש לזהות את הקשר בין הנתון הנוסף לבין ההפרשים המופיעים במונה של כל מחובר בסכום המבוקש, וכן את הפרש הסדרה המקורית המופיע בכל מכנה.
השאלה מזמנת דיון גם בהבדל בין הגדרת סדרה חשבונית באמצעות כלל שגרתי לבין הכלל הבלתי שגרתי המופיע כאן. הכלל הנתון בשאלה מדגיש את הצורך בבחינת המקרה הפרטי של ההפרש הראשון בכל פעם שמשתמשים באינדקס $n-1$, שמוביל למקום 0 (אפס) בסדרה, שאינו מוגדר.
במהלך הפתרון המוצע להלן מוצע גם שינוי בשאלה, שמאפשר להפגיש את התלמידים עם הסוגיה ולדון בה לעומקה.

א. הוכח שהסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ היא חשבונית.

כדי להוכיח שסדרה היא חשבונית יש להוכיח כי ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא קבוע ואינו תלוי במיקום – n. כלומר יש למצוא את הערך המספרי של ההפרש: $a_{n+1} - a_n$ לכל n טבעי.

1. על התלמיד להבין, מתוך הסימון המקובל, ומתוך ההגדרה המצורפת, כי הסימון:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

מכוון לסכום n איברים ראשונים בסדרה. באופן זה, מתקבל בקלות כי: $S_1 = a_1 = 9$.

2. מידע נוסף מיידי מהנתונים הוא ההפרש: $S_{n+1} - S_n$, שהוא הביטוי הכללי עבור a_{n+1}.

ומכאן:

$$(*) \quad a_{n+1} - a_n = (S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) = (-7n + 9) - (-7(n-1) + 9) = (-7)$$

כדאי לשים לב לכך שחישוב זה של הפרש הסדרה מתאים לכל $n > 1$ טבעי, ולא מתאים להפרש בין שני האיברים הראשונים בסדרה: $a_2 - a_1$,

שכן אם נציב ב (*) $n = 1$ נידרש להתייחס לסכום $S_{1-1} = S_0$, שאינו מוגדר. על כן, כדי לספק הוכחה שלמה לכך שהסדרה חשבונית יש לחשב באופן ישר את ההפרש הראשון: $a_2 - a_1$.

ניתן לעשות זאת באמצעות כלל הנסיגה הנתון:

$$S_2 = S_{1+1} = S_1 - 7 \cdot 1 + 9 = 9 - 7 + 9 = 11$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 11 - 9 = 2$$

$$a_2 - a_1 = 2 - 9 = (-7).$$

כדי להשתכנע שנדרשת גם הבדיקה עבור ההפרש בין שני האיברים הראשונים בנפרד בידקו האם סדרה המוגדרת באמצעות הכלל הבא היא חשבונית:

$$\begin{cases} S_1 = 5 \\ S_{n+1} = S_n - 7n + 9 \end{cases}$$

ברור כי החישוב של ההפרש בין כל שני איברים סמוכים עבור n>1 זהה לחישוב הקודם. אולם ההפרש בין שני איברים הראשונים משתנה:

$$S_2 = S_{1+1} = S_1 - 7 \cdot 1 + 9 = 5 - 7 + 9 = 7$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 7 - 9 = (-2)$$

$$a_2 - a_1 = (-2) - 9 = (-11) \neq (-7).$$

סדרה נוספת מקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n$

ב. חשב את הסכום הבא (רשום תשובתך באמצעות שברים, או בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית)

$$\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + \frac{b_3 - b_2}{a_2 - a_3} + \frac{b_4 - b_3}{a_3 - a_4} + \cdots + \frac{b_{20} - b_{19}}{a_{19} - a_{20}}$$

בהפרש המבוקש, מזהים במונים של המחוברים, את ההפרשים התואמים את הכלל החדש הנתון, כלומר בדיוק את 19 האיברים הראשונים של הסדרה a_n , ובמכנים מופיע ההפרש הקבוע של סדרה זו. לכן:

$$\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2}+\frac{b_3-b_2}{a_2-a_3}+\frac{b_4-b_3}{a_3-a_4}+\cdots+\frac{b_{20}-b_{19}}{a_{19}-a_{20}}=$$

$$\frac{a_1}{(-7)}+\frac{a_2}{(-7)}+\frac{a_3}{(-7)}\ldots+\frac{a_{19}}{(-7)}=$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}}{(-7)}=\frac{S_{19}}{(-7)}$$

נותר למצוא את S_{19}. הדרך הקלה ביותר: מתוך המידע שנאסף בסעיף א אפשר לרשום, באמצעות נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית:

$$a_{19}=a_1+(19-1)(-7)=9+18(-7)=9-126=(-117)$$

$$S_{19}=\frac{(9-117)\cdot 19}{2}=(-1026)$$

$$\frac{S_{19}}{(-7)}=\frac{1026}{7}\approx 146.57$$

2. **הסתברות**

ערכו סקר בין משתתפי כינוס בחירות ומצאו: 20% מהנשים קוראות עיתון בוקר. מספר הגברים גדול פי a ממספר הנשים שקוראות עיתון בוקר.

השאלה מזמנת תרגול והעמקה של הבנה בנושאים הבאים:

- מאורעות תלויים ובלתי תלויים
- בניית טבלת הסתברות עם פרמטר, או לחילופין: בניית עץ הסתברויות עם פרמטר
- התייחסות לשאלה: "מה סביר יותר?", כלומר פיתוח חשיבה הסתברותית
- נוסחת ברנולי

הפתרון מובא להלן באופן שיטתי ושגרתי. במהלכו מועלות שאלות לגבי האפשרות לקצר תהליכים באמצעות הבנת הנתונים והמושגים ההסתברותיים.

א. בטא באמצעות a את ההסתברות לבחור גבר מבין כלל משתתפי כינוס הבחירות?

נבנה טבלת הסתברויות (נעיז להתחיל לבנות). נכניס משתנה: ההסתברות לבחור אישה:

	נבחרה אישה	**נבחר גבר**	**סה"כ**
נבחר/ה קורא/ת עיתון	$\mathbf{0.2x}$		
נבחר/ה שאינו/שאינה קורא/ת עיתון			
סה"כ	$\mathbf{x}$	$\mathbf{1-x=0.2ax}$	**1**

הסבר: ההסתברות לבחור גבר, מצד אחד, משלימה את ההסתברות לבחור אישה ל-1, ומצד שני גדולה פי a מההסתברות לבחור אישה שקוראת עיתון.

פתרון המשוואה: $1-x=0.2ax$ הוא: $x=\frac{1}{1+0.2a}$ מכאן ההסתברות לבחור גבר מבין משתתפי הכינוס היא:

$$\frac{0.2a}{1+0.2a}$$

אפשר לפתור סעיף זה באמצעות עץ הסתברויות. גם כאן בוחרים להכניס משתנה עובר ההסתברות לבחור אישה. במקרה זה ההסברות לבחור קורא עיתון מתוך הנשים היא: 0.2 . ההמשך של פתרון הסעיף יוביל למשוואה זהה.

ב. מהי ההסתברות לבחור משתתף/משתתפת שקורא/קוראת עיתון בוקר, אם ידוע שהמאורעות: "נבחרה אישה" ו-"נבחר מישהו שקורא/קוראת עיתון בוקר" בלתי תלויים? הסבר.

כדי לענות על סעיף זה נמשיך במילוי הטבלה.

	נבחרה אישה A	נבחר גבר $\bar{A}$	סה"כ
נבחר/ה קורא/ת עיתון B	$P(A\cap B)=\frac{0.2}{1+0.2a}$		$P(B)=0.2$
נבחר/ה שאינו/שאינה קורא/ת עיתון $\bar{B}$			0.8
סה"כ	$P(A)=\frac{1}{1+0.2a}$	$\frac{0.2a}{1+0.2a}$	1

ונזכור: מאורעות שאינם תלויים זה בזה מקיימים את הקשר: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

כדאי לנצל הזדמנות זו כדי להזכיר מדוע קשר זה מגדיר מאורעות בלתי תלויים:

שהרי, מאורעות A ו-B יהיו בלתי תלויים, אם התרחשות האחד אינה משפיעה על ההסתברות להתרחשות האחר, כלומר: $P(A/B)=P(A)$. ואולם, לכל שני מאורעות A ו-B, $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, ומכאן, אם אלה אינם תלויים הרי שמתקיים: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$.

אם כך נדרוש: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ ונקבל: $P(B)=0.2$

האם אנו באמת זקוקים לכל החישוב/התהליך הארוך הזה?

אם ברור שכאשר המאורעות בלתי תלויים מתקיים:

$P(A/B)=P(A)$, וכך גם: $P(B/A)=P(B)$, הרי שידוע כבר מנתוני השאלה שההסתברות לבחור קוראת עיתון מבין כל הנשים היא: 0.2, ולכן גם $P(B)=0.2$.

ג. עבור הסעיפים הבאים: ידוע כי $a = 6$.

נבחר באקראי משתתף/משתתפת מבין באי הכינוס. ידוע שהוא קורא/קוראת עיתון בוקר.
מה סביר יותר, שהוא גבר או אישה?

אנו נדרשים למילוי הטבלה במלואה רק מרגע זה, בו ניתן לנו גם ערכו של הפרמטר: $a = 6$

	נבחרה אישה A	**נבחר גבר $\bar{A}$**	**סה"כ**
נבחר/ה קורא/ת עיתון B	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{1}{5}$
נבחר/ה שאינו/שאינה קורא/ת עיתון $\bar{B}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{4}{5}$
סה"כ	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$	**1**

כעת נצטרך להשוות בין: $P\left({}^{A}/_{B}\right)$ לבין: $P\left({}^{\bar{A}}/_{B}\right)$. (זריזי המחשבה, הגורמים שהחישוב אינו נחוץ כלל, צודקים, אך החישוב מובא כאן, בדיוק לצורך העלאת הסוגיה לדיון עם תלמידים.)

$$(*)\ \ P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{\left(\frac{1}{11}\right)}{\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{5}{11} \qquad ; \qquad P\left({}^{\bar{A}}/_{B}\right) = \frac{\left(\frac{6}{55}\right)}{\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{6}{11}$$

מתוך החישוב: סביר יותר לבחור גבר קוראי העיתון המשתתפים בכינוס.

כדאי לשים לב – הזדמנות למידה:

האם לכל שני מאורעות מתקיים הקשר:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) + P\left({}^{\bar{A}}/_{B}\right) = 1$$

נוכיח:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) + P\left({}^{\bar{A}}/_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

כלומר: רק אחד מבין שני החישובים של נחוצים.

אך האם בכלל החישוב נחוץ?

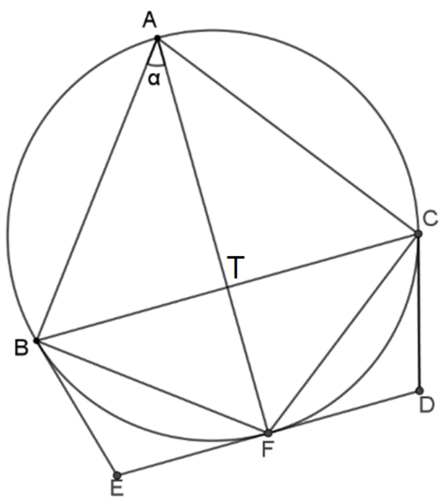
כיון שנתון שהמאורעות: "נבחרה אישה" ו- "נבחר/ה קורא/ת עיתון" אינם תלויים, הרי שהיחס בין הנשים לגברים בקבוצת קוראי העיתונים, כמו גם בקבוצת אלה שאינם קוראים עיתונים, זהה ליחס בין הגברים לנשים באוכלוסיה כולה. על כן, היות שידוע שההסתברות לבחור אישה נמוכה מההסתברות לבחור גבר – באוכלוסיית משתתפי הכינוס כולה, הרי שכך יהיה גם בין קוראי העיתון, ואין צורך בחישובי הסתברויות מותנות כלל.

ד. הנח כי מספר המשתתפים בכינוס גדול מאד. בוחרים באקראי 6 ממשתתפי הכינוס (גברים או נשים). מהי ההסתברות לבחור לפחות חמש נשים שקוראות עיתון בוקר?

בסעיף זה יש להשתמש בנוסחת ברנולי עבור המאורע: "נבחרה אישה קוראת עיתון", כלומר: $P(A \cap B) = \frac{1}{11}$. לפחות 5 הצלחות מתוך 6, משמע: 5 הצלחות או 6 הצלחות. לכן:

$$P\left({}^{\text{5 נשים קוראות}}/_{\text{6 משתתפים}}\right) + P\left({}^{\text{5 נשים קוראות}}/_{\text{6 משתתפים}}\right)$$
$$= 6 \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^5 \cdot \frac{10}{11} + \left(\frac{1}{11}\right)^6$$

3. **טריגונומטריה**



במעגל שרדיוסו R חסום משולש ABC.

ידוע כי:

AF הוא קוטר במעגל.

המשיק למעגל בנקודה F מקביל למיתר BC.

הנקודה E היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב-F עם המשיק למעגל ב-B.

הנקודה D היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב-F עם המשיק למעגל ב-C. AF ו- BC נפגשים בנקודה T.

נתונה הזווית: $\sphericalangle BAF = \alpha$.

השאלה משלבת מיומנויות גיאומטריות וטריגונומטריות.

בטריגונומטריה נדרש שימוש בקשרים בין הצלעות במשולש ישר זווית, משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים והזהויות: $sin2x = 2sinxcosx$, $sin(180^\circ - x) = sinx$, $tanx = \frac{sinx}{cosx}$.

בגיאומטריה ניתן להשתמש במשפטים הבאים, או בחלקם:

- משיק למעגל מאונך לרדיוס המגיע אל נקודת ההשקה.
- זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.
- ישר המאונך לאחד משני ישרים מקבילים, מאונך גם לשני.
- אנך למיתר ממרכז המעגל, חוצה את המיתר.
- משולש בו הגובה לצלע מתלכד עם התיכון לצלע, הוא משולש שווה שוקיים, בו הצלע הנ"ל היא הבסיס.
- זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני.
- מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה ואחד מהם חוצה את השני, הוא דלתון.
- היחס בין שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון.
אם לא משתמשים במשפט זה, יש צורך להשתמש בנוסחה הטריגונומטרית לחישוב שטח משולש.

לאחר שימוש במשפטים הנ"ל מסיקים:

א. בטא באמצעות α את $\sphericalangle BEF$. הסבר שיקוליך בקצרה. אין צורך לפרט כהוכחה בגיאומטריה.

ΔABF ישר זווית, לכן: $BF = 2Rsin\alpha$

ב. הוכח כי: $BE = Rtan\alpha$.

ΔBEF הוא שווה שוקיים. הפעלת משפט הסינוסים בו נותנת:

$$\frac{BE}{sin\alpha} = \frac{BF}{sin(180^\circ - 2\alpha)}$$

ומכאן:

$$BF = \frac{2Rsin\alpha \cdot sin\alpha}{sin2\alpha} = \frac{2Rsin^2\alpha}{2sin\alpha cos\alpha} = Rtan\alpha$$

ג. חשב את מידת הזווית α עבורה שטח המשולש BFC גדול פי 3 משטח המשולש BEF.

$\Delta BFC \sim \Delta BEF$. אם היחס בין השטחים שלהם הוא 3, אזי היחס בין צלעות מתאימות שלהם הוא $\sqrt{3}$. לכן:

$$\frac{BF}{BE} = \frac{2Rsin\alpha}{Rtan\alpha} = 2cos\alpha = \sqrt{3}$$

כלומר, כיוון שהזווית חדה:

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = 30^\circ$$

ד. עבור $\alpha = 30^\circ$, בטא באמצעות R את אורכו של הקטע BD.

לפי משפט הקוסינוסים במשולש ΔBDF :

$$BD^2 = BF^2 + BE^2 - 2BF \cdot BE \cdot cos150^\circ$$

$$BD^2 = 4R^2 \cdot \frac{1}{4} + R^2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 2R \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2\left(1 + \frac{1}{3} + 1\right)$$

$$BD = \frac{R\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

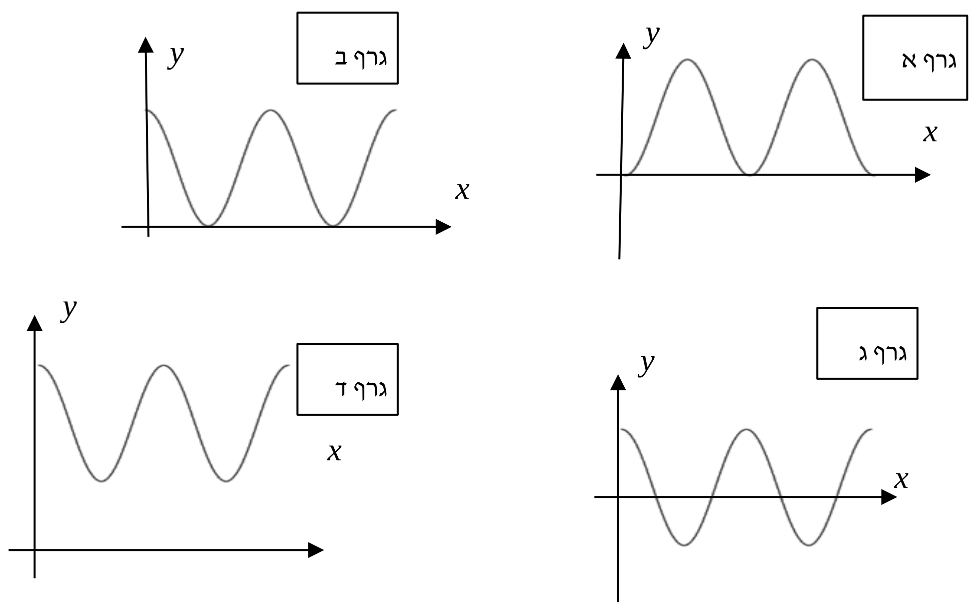
4. **אנליזה**

נתונות הפונקציות: $f(x) = 2cos^2 2x$, $g(x) = cos4x + 2$.

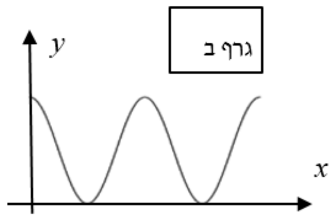
השאלה משלבת בין המיומנויות ופריטי הידע הבאים:

- זהות טריגונומטרית לקוסינוס של זווית כפולה
- הכרות עם הגרף של פונקציית הקוסינוס
- הבנה גרפית של ריבוע (חזקה שניה) של פונקציה כלשהי – קוסינוס
- הבנה גרפית של תוספת קבוע לפונקציה – הזזה מעלה/מטה
- התייחסות לאינטגרל כמחשב שטח עבור פונקציה אי-שלילית.
- הבנת ההשפעה של הזזה מעלה על האינטגרל – פונקציית שטח מצטבר

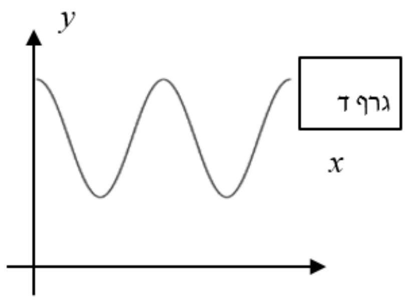
א. מצא לכל אחת מהפונקציות את הגרף המתאים מבין ארבעת הגרפים הבאים, נמק קביעתך.



$f(x) = 2cos^2 2x$ מתאימה ל**גרף ב** מהשיקולים הבאים:

הגרף אינו עובר בראשית הצירים. $f(0) = 2$.


היות ו- $f(x)$ היא כפל ב-2 של ריבוע של $cos2x$, הרי שאפשר לבחון את הפונקציה הזו.
$cos2x$ היא כיווץ פי 2 של $cosx$ וככזו צריכה להשיק לציר ה- x.

$g(x) = cos4x + 2$ מתאימה ל**גרף ד** מהשיקולים הבאים:


נבחן את טווח הערכים של הפונקציה:

$$-1 \le cos4x \le 1$$

לכן:

$$1 \le cos4x + 2 \le 3$$

הגרף היחיד המתאים הוא גרף ד.

ב. הוכח: $g(x) = f(x) + c$ מה ערכו של c?

נשתמש בזהות לקוסינוס של זווית כפולה: $cos4x = cos2 \cdot 2x = 2cos^2 2x - 1$,

$$g(x) = cos4x + 2 = cos2 \cdot 2x + 2 = 2cos^2 2x + 1 = f(x) + 1$$

לכן: $c = 1$.

ג. בכמה גדול $\int_0^\pi g(x)dx$ מ- $\int_0^\pi f(x)dx$. נמק תשובתך. (אין חובה לחשב במפורש את שני האינטגרלים).

כדי לדעת בכמה גדול $\int_0^\pi g(x)dx$ מ- $\int_0^\pi f(x)dx$ נשתמש בקשר האלגברי שמצאנו בסעיף קודם:

$$\int_0^\pi g(x)dx - \int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \big(g(x) - f(x)\big)dx =$$

$$\int_0^\pi \big(f(x) + 1 - f(x)\big)dx = \int_0^\pi 1dx = x|_0^\pi = \pi$$

ניתן להסיק תשובה זו גם מהמצב הגרפי. היות והפונקציה $g(x)$ היא הזזה מעלה של הפונקציה $f(x)$ יחידה אחת מעלה, הרי שהשטח שבין הגרף של $g(x)$ לבין ציר ה- x גדול

מהשטח שבין הגרף של $f(x)$ לבין ציר ה- x, בדיוק בגדלו של מלבן שרוחבו יחידה אחת ואורכו כאורך קטע האינטגרציה – במקרה שלנו: π.

ד. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר מסיבוב סביב ציר ה- x של גרף הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ בתחום: $0 \le x \le \pi$.

הפונקציה $f(x)$ אי שלילית. לכן $\sqrt{f(x)}$ מוגדרת בכל התחום המבוקש. כדי לחשב את נפח גוף הסיבוב יש לחשב:

$$\pi\int_0^\pi \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 dx = \pi\int_0^\pi f(x)dx = \pi\int_0^\pi 2cos^2xdx$$

כדי לחשב אינטגרל זה נשתמש בזהות שמצאנו, באמצעות הפונקציה $g(x)$, היות שאין דרך ישירה לחשב אינטגרל לריבוע של קוסינוס.

$$\pi\int_0^\pi f(x)dx = \pi\int_0^\pi (g(x)-1)dx =$$

$$\pi\int_0^\pi (cos4x+1)dx = \pi\left(\frac{sin4x}{4}+x\right)|_0^\pi =$$

$$\pi(0+\pi-0-0) = \pi^2$$

5. **אנליזה**

נתונה הפונקציות: $g(x) = 1 + cos(ax)$ $\quad (a > 0)$, $\quad f(x) = \frac{sinx}{g(x)}$.

המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות של $g(x)$ עם ציר ה-x הוא π.

השאלה משלבת בין המיומנויות ופריטי הידע הבאים:

- מחזוריות של פונקציות טריגונומטריות
- טכניקה בסיסית של פתרון משוואות טריגונומטריות פשוטות
- זהויות טריגונומטריות פשוטות, קוסינוס וסינוס של זווית כפולה
- נגזרת של מנה משולבת עם פונקציות טריגונומטריות
- השפעת ההרכבה של פונקציית שורש ריבועי על פונקציה אחרת מבחינה גרפית ללא חקירה שיטתית.

א. מצא את ערכו של a.

הצב את הערך של a שמצאת וחקור את הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq 3\pi$:

$g(x) = 1 + cos(ax)$ $(a > 0)$ חותכת את ציר ה-x כאשר: $cos(ax) = (-1)$.

היות שהערך (-1) מתקבל פעם אחת במחזור של הפונקציה $cos(x)$, הרי שלפי הנתון אורך המחזור של הפונקציה $g(x) = 1 + cos(ax)$ הוא π . לכן: $a = 2$,

כלומר: $g(x) = 1 + cos(2x)$

ב. ציין את:

- נקודות החיתוך עם הצירים,
- האסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש),
- תחומי העליה והירידה ונקודות הקיצון (אם יש).

יש לחקור את הפונקציה: $f(x) = \frac{sinx}{1+cos(2x)}$ בתחום: $-\pi \leq x \leq 3\pi$

- נקודות חיתוך עם ציר x: מונה מתאפס ומכנה לא מתאפס: המועמדים בתחום:

$x = -\pi$, $\quad x = 0$, $\quad x = \pi$, $\quad x = 2\pi$, $\quad x = 3\pi$

וניתן לבדוק את המכנה בכל אחד מאלה , או באופן כללי, המכנה מתאפס כאשר:

$cos(2x) = (-1)$

כלומר כאשר: $2x = \pi + 2\pi k$, k שלם, ז"א: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k שלם.

לכן: מונה ומכנה לא מתאפסים יחד.

נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן:

$$(-\pi, 0), \qquad (0,0), (\pi, 0), \ (2\pi, 0), \ (3\pi, 0)$$

- אסימפטוטות אנכיות לציר ה-x:

$$x = -\frac{\pi}{2}, \qquad x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}$$

- נגזרת לצורך מציאת תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{cosx \cdot (1 + cos2x) - sinx(-2sin2x)}{(1 + cos2x)^2} =$$

$$\frac{cosx \cdot (1 + cos2x + 4sin^2x)}{(1 + cos2x)^2} = \frac{cosx \cdot (2cos^2x + 4sin^2x)}{(1 + cos2x)^2}$$

מכאן רואים שסימני הנגזרת נקבעים לפי הסימנים של $cosx$.

אפשר לגזור את הפונקציה ממצב פשוט יותר שלה:

$$f(x) = \frac{sinx}{1 + cos(2x)} = \frac{sinx}{1 + 2cos^2(x) - 1} = \frac{sinx}{2cos^2(x)}$$

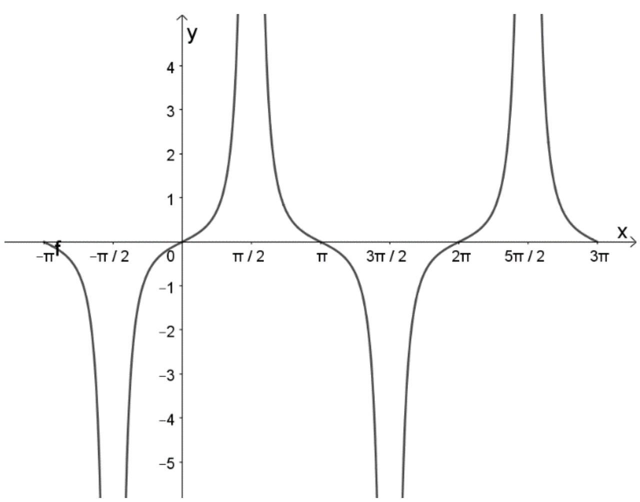
ממצב זה מגיעים בקלות לנגזרת:

$$f'(x) == \frac{2cos^2x + 4sin^2x}{4cos^3x} = \frac{2 + 2sin^2x}{4cos^3x}$$

גם כאן סימני הנגזרת זהים לסימנים של $cosx$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

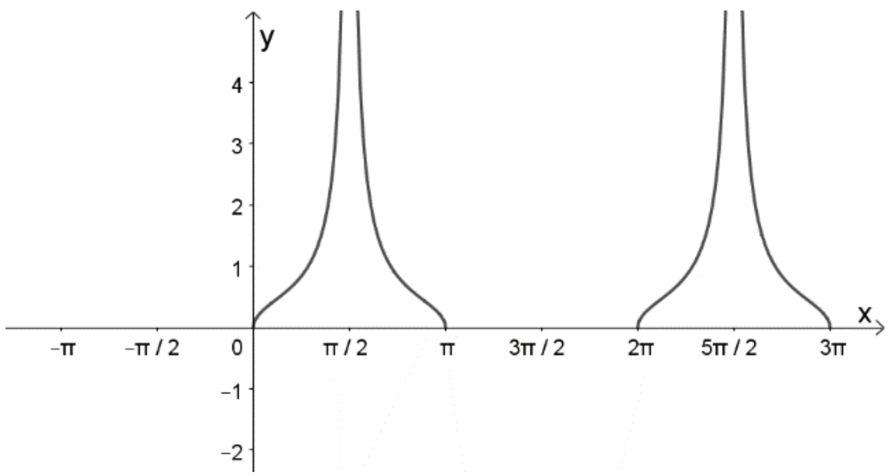
הגרף המתקבל:



ד. הוסף לאותה מערכת צירים סקיצה לגרף הפונקציה: $h(x)=\sqrt{f(x)}$.
התייחס לתחום ההגדרה של $h(x)$.

השורש הריבועי של הפונקציה יהיה מוגדר רק במקומות בהם הגרף אינו מתחת לציר ה-x.
יתקבל המצב הבא:

כדאי לשים לב לכך שבנקודות החיתוך של הגרף החדש עם ציר ה-x השיפוע של הפונקציה המתקבלת אינסופי, בדומה להתנהגות של $\sqrt{x}$ ליד ראשית הצירים.



6. אנליזה - דומה לשאלה 5

נתונה הפונקציות: $g(x) = 1 + cos(ax)$ $(a > 0)$, $f(x) = \frac{sinx}{(1+cos(ax))^2}$.

המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות של $g(x)$ עם ציר ה- x הוא π.

השאלה משלבת בין המיומנויות ופריטי הידע הבאים:

- מחזוריות של פונקציות טריגונומטריות
- טכניקה בסיסית של פתרון משוואות טריגונומטריות פשוטות
- זהויות טריגונומטריות פשוטות, קוסינוס וסינוס של זווית כפולה
- נגזרת של מנה משולבת עם פונקציות טריגונומטריות ועם פונקציה מורכבת
- אינטגרציה לפי זיהוי פונקציה וכפל בנגזרת.

ערכו של הפרמטר a זהה לזה שבשאלה 5, כך גם נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה-x והאסימפטוטות המאונכות לציר ה-x. אנו מביאים להלן את הפתרון השלם, לנוחיות הקוראים שמתרכזים בשאלה זו בלבד.

א. מצא את ערכו של a .

הצב את הערך של a שמצאת וחקור את הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \le x \le 3\pi$:

$g(x) = 1 + cos(ax)$ $(a > 0)$ חותכת את ציר ה-x כאשר: $cos(ax) = (-1)$.

היות שהערך (-1) מתקבל פעם אחת במחזור של הפונקציה $cos(x)$, הרי שלפי הנתון אורך המחזור של הפונקציה $g(x) = 1 + cos(ax)$ הוא π . לכן: $a = 2$,

כלומר: $g(x) = 1 + cos(2x)$.

ב. הוכח כי: $f'(x) = \frac{1+3sin^2x}{4cos^5x}$

יש לגזור את הפונקציה: $f(x) = \frac{sinx}{(1+cos(2x))^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{sinx}{(1+cos(2x))^2}\right)' = \frac{cosx(1+cos(2x))^2 - sinx \cdot 2(1+cos(2x)\cdot(-2\,sin(2x))}{(1+cos(2x))^4}$$

$$= \frac{(1+cos(2x))((1+cos(2x))cosx + 4sinx\,sin(2x))}{(1+cos(2x))^4} = \frac{2cos^3x + 8sin^2xcosx}{(1+cos(2x))^3} =$$

$$= \frac{(2cos^2x + 8sin^2x)cosx}{8cos^6x} = \frac{cos^2x + 4sin^2x}{4cos^5x} = \frac{1+3sin^2x}{4cos^5x}$$

ג. ציין את:

- נקודות חיתוך עם הצירים.

- נקודות חיתוך עם ציר x: מונה מתאפס ומכנה לא מתאפס: המועמדים בתחום:

$$x=-\pi\,,\qquad x=0\,,\qquad x=\pi\,,\qquad x=2\pi\,,\qquad x=3\pi$$

וניתן לבדוק את המכנה בכל אחד מאלה, או באופן כללי, המכנה מתאפס כאשר:

$$\cos(2x)=(-1)$$

כלומר כאשר: $2x=\pi+2\pi k$, k שלם,

ז"א: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, k שלם.

לכן: מונה ומכנה לא מתאפסים יחד.

נקודות החיתוך עם ציר ה-x הן:

$$(-\pi,0),\qquad (0,0)\,,\qquad (\pi\,,0),\ \ (2\pi,0)\,,\ \ (3\pi,0)$$

- אסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש).
- אסימפטוטות אנכיות לציר ה- x

$$x=-\frac{\pi}{2}\,,\qquad x=\frac{\pi}{2}\ ,x=\frac{3\pi}{2}\ ,x=\frac{5\pi}{2}$$

- תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון (אם יש).
- בנגזרת שמצאנו:

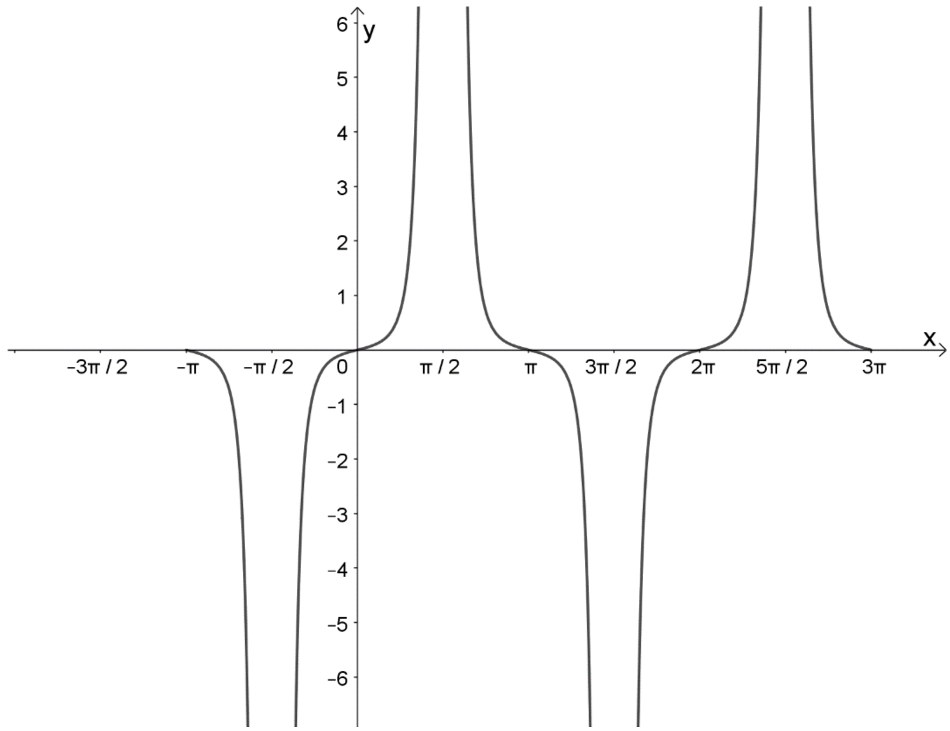
$$f'(x)=\frac{1+3sin^2x}{4cos^5x}$$

המונה חיובי לכל ערך של x בתחום ההגדרה.

המכנה קובע את סימני הנגזרת, כלומר סימני הנגזרת זהים לסימני הפונקציה $cosx$ בתחום הנחקר.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

מתקבל הגרף הבא (גם הוא דומה מאד לגרף שהתקבל בשאלה 5):



ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ציר ה- x לבין הישר: $x=\frac{\pi}{4}$

היות שגרף הפונקציה בתחום המבוקש נמצא מעל ציר ה-x, יש לחשב את ערך האינטגרל הבא:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sinx}{(1+cos(2x))^2}dx$$

נשים לב כי: $(1+cos(2x))' = -2sin2x$

כלומר לא ניתן לזהות במבנה של הפונקציה, כפי שהיא מוצגת, כפל של פונקציה בנגזרתה.

אולם, אם נציג את הפונקציה כך:

$$f(x)=\frac{sinx}{(1+cos(2x))^2}=\frac{sinx}{(2cos^2x)^2}=\frac{sinx}{4cos^4x}$$

בהצגה זו, מזהים כי:

$$(cosx)'=-sinx$$

לכן, אם נסמן:

$$g(x)=cosx, \qquad g'(x)=-sinx$$

נקבל:

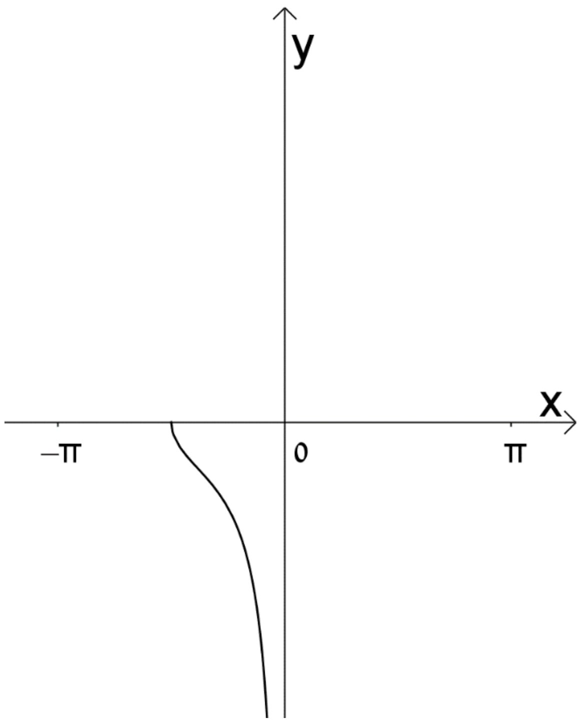
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{sinx}{4cos^4x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-g'(x)}{4g^4(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-g^{-4}(x)g'(x)}{4}dx=\frac{-g^{--3}(x)}{4\cdot(-3)}\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{1}{12cos^3x}\Big|_0^{\pi/4}=\frac{2\sqrt{2}-1}{12}$$

לכן גודל השטח המבוקש הוא: $\frac{2\sqrt{2}-1}{12}$ יחידות רבועות.

7. אנליזה

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{cos(x)}}{sin(x)}$ בתחום: $-\pi \le x \le \pi$



השאלה משלבת בין המיומנויות ופריטי הידע הבאים:

- פונקציה זוגית או אי-זוגית
- תכונות הפונקציות הטריגונומטריות: סינוס וקוסינוס
- השפעת השורש הריבועי על תחום הגדרה
- אינטגרל לחישוב נפח גוף סיבוב
- חישוב אינטגרל באמצעות זיהוי פונקציה וכפל בנגזרתה

א. רשום, עבור התחום הנתון בשאלה:

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

הפונקציה מוגדרת במקומות בהם המכנה אינו מתאפס ובמקומות בהם $cosx \ge 0$.

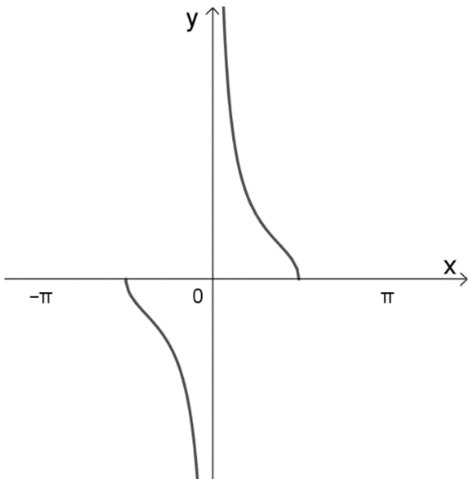
כלומר: $x \neq 0$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(2) האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או אחרת? נמק קביעתך.

הפונקציה אי-זוגית: $f(-x)=\frac{\sqrt{cos(-x)}}{sin(-x)}=\frac{\sqrt{cos(x)}}{-sin(x)}=-f(x)$.

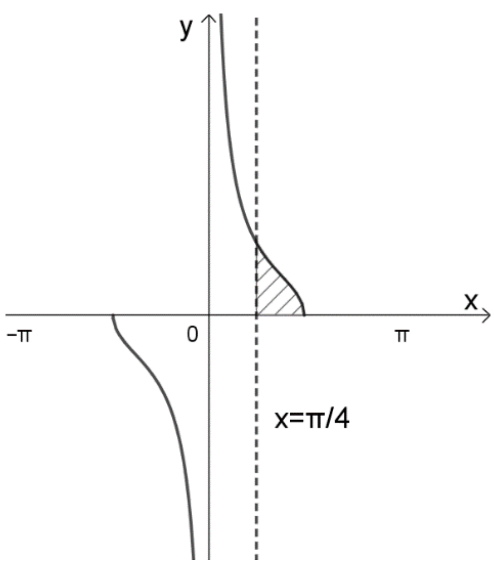
ב. לפניך גרף של הפונקציה בחלק מהתחום הנתון. השלם אותו, כך שיתאר את הגרף של הפונקציה בכל התחום הנתון.

הגרף השלם:



ג. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר: $x=\frac{\pi}{4}$ מסתובב סביב ציר ה-x. חשב את נפח הגוף הנוצר באופן זה.

השטח המסומן בסרטוט מסתובב סביב ציר ה-x.



נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא:

$$\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{sin^2x}dx$$

נזהה: $(sinx)'=cosx$,

לכן נסמן:

$$g(x)=sinx$$
$$g'(x)=cosx$$

ונקבל:

$$\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{sin^2x}dx=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{g'(x)}{g^2(x)}dx=-\pi\cdot\frac{1}{g(x)}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=$$

$$-\pi\cdot\frac{1}{sinx}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=-\pi\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

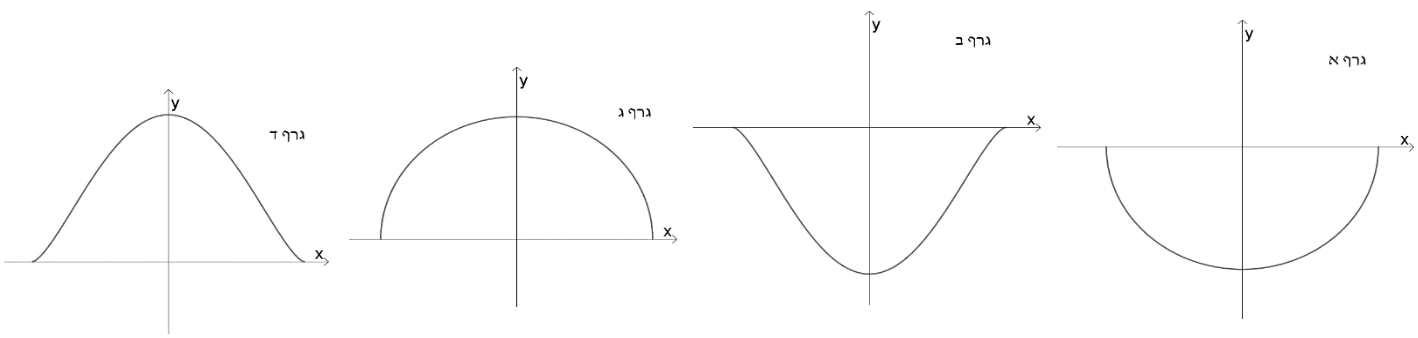
8. **<u>אנליזה</u>**

השאלה משלבת בין המיומנויות ופריטי הידע הבאים:

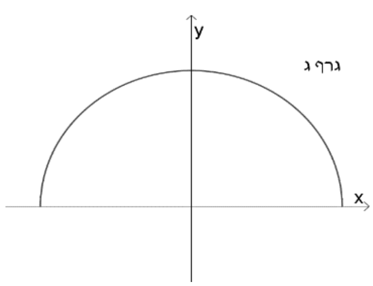
- הכרות עם תכונות פונקציית השורש הריבועי ונגזרתה
- בעיית ערך קיצון עם גרפים
- טכניקה אלגברית של עבודה עם שורשים
- שיקולי סימטריה והבנה גרפית

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$, $k > 0$.

א. בחר בין הגרפים הבאים את הגרף המתאים לפונקציה. נמק בחירתך.



הגרף המתאים לפונקציה: $f(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$, $k > 0$ הוא גרף ג:



נימוק: ערכי הפונקציה חיוביים,

תחום ההגדרה של הפונקציה: $-k \le x \le k$

בקצות תחום ההגדרה לנגזרת:

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{k^2 - x^2}}$$

יש אסימפטוטות מאונכות לציר ה-x, כלומר הערכים המוחלטים של שיפועי הפונקציה שואפים לאינסוף.

ב. מנקודה **<u>מימין לציר y</u>** (נסמנה – A) שעל הגרף של $f(x)$ מעבירים אנכים לצירים. האנך לציר x חותך את הציר בנקודה B, האנך לציר y חותך את הציר בנקודה C. הנקודה O היא ראשית הצירים.

(1) בטא באמצעות k את שיעורי הנקודה A בה מתקבל שטח מקסימלי למרובע $ABOC$ הנוצר באופן זה.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב-t. נקבל: $A\left(t,\sqrt{k^2-t^2}\right)$, שטח המרובע $ABOC$ הוא:

$$S(t)=t\sqrt{k^2-t^2}$$

נגזרתה:

$$S'(t)=\frac{k^2-2t^2}{\sqrt{k^2-t^2}}$$

תחום ההגדרה של המשתנה t המתאים לבעיה הוא:

$$0<t<k$$

הנגזרת מתאפסת בתחום זה בנקודה בה:

$$t=\frac{k}{\sqrt{2}}$$

בחינה של סימני הנגזרת מראה שבנקודה זו יש לפונקציה $S(t)$ מקסימום כנדרש.

הסבר פשוט: המכנה של הנגזרת חיובי בתחום, לכן המונה קובע את סימניה.

המונה של הנגזרת הוא פרבולה בעלת מקסימום, ולכן הסימן של הנגזרת מימין לנקודת האיפוס הימנית הוא שלילי ומשמאלה הוא חיובי.

(2) ידוע כי השטח המקסימלי של מרובע $ABOC$ שנוצר באופן זה הוא: 2.

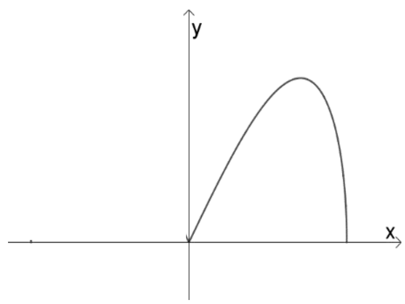
מצא את ערכו של k.

$$S\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)=\frac{k}{\sqrt{2}}\sqrt{k^2-\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{k^2}{2}=2$$

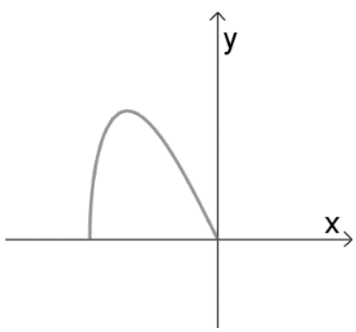
כלומר: $k=2$

(3) לפניך הגרף המתאים לתיאור פונקציית השטח של המרובעים $ABOC$, כאשר הנקודה A שעל הגרף מימין לציר y.

סרטט גרף שיתאר את פונקציית השטח של המרובעים $ABOC$, כאשר הנקודה A נמצאת משמאל לציר ה-y. פרט שיקוליך



ראשית, כיוון שהפונקציה $f(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$ היא זוגית, הרי שהשטח הנוצר עבור נקודה מימין לציר ה-y זהה לשטח הנוצר עבור הנקודה הסימטרית לה משמאל לציר ה-y, כלומר, הגרף המבוקש הוא שיקוף ביחס לציר ה-y של פונקציית השטח הנתונה:



כדאי להסב תשומה הלב גם לפתרון שיטתי, לפי בניית פונקציה:

וכאשר הנקודה A נמצאת משמאל לציר ה-y הפונקציה המתקבלת עבור השטח היא:

$S(t) = -t\sqrt{k^2 - t^2}$

היות ואורך הקטע BO הוא: $-t$.

באופן זה מתקבל מקסימום לפונקציה ולא מינימום, כפי שמתקבל בשגיאה הנפוצה.