שאלות קצרות לתרגול וחידוד ההבנה 5 יחידות שאלון ראשון

הערות ופתרונות למורה
5 יח"ל

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

שאלות קצרות לתרגול וחידוד ההבנה
5 יחידות -שאלון ראשון- למורה

75 שאלות קצרות מאד בנושאים השייכים לשאלון 035581. השאלות מיועדות לחידוד ההבנה ולבחינת יכולת ההפעלה של מיומנויות יסודיות. בתכנית הלימודים החדשה תיכלל בבחינת הבגרות שאלה שתורכב מסעיפים כאלה, בלתי תלויים זה בזה. השאלה תחליף את שאלה מספר 1 הקיימת בנושא בעיה מילולית.

אנליזה

שאלה 1

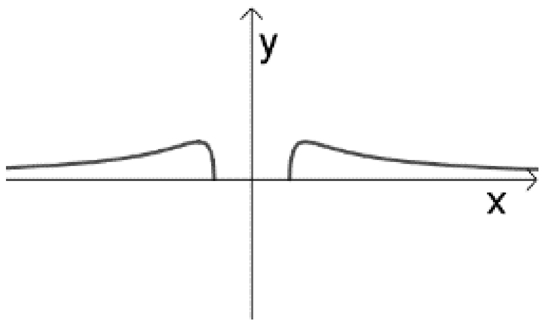
נתונות ארבע פונקציות וגרף של אחת מהן.

$$f(x) = x^2\sqrt{x^2-1}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$p(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$$



מצא לאיזו מבין הפונקציות מתאים הגרף הנתון. נמק, עבור כל אחת מהפונקציות האחרות מדוע אינה מתאימה לגרף.

הפונקציה המתוארת בגרף היא:

$$p(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$$

תכונות הפונקציה על פיהן תתבצע הבחירה:

תחום ההגדרה בשתי קרניים, לכן ייתכן: $x \le -1$ או $x \ge 1$

חיוביות/שליליות הפונקציה : הפונקציה חיובית בכל תחום ההגדרה.

התנהגות באינסוף: עבור $x \to \pm\infty$ הפונקציה שואפת לאפס.

לפונקציה אסימפטוטה אופקית: $y = 0$

נימוקים לאי התאמה של הפונקציות האחרות:

$f(x) = x^2\sqrt{x^2-1}$ שואפת לאינסוף ולא לאפס עבור $x \to \pm\infty$

$g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ תחום ההגדרה הוא : $-1 \le x < 0$ או $0 < x \le 1$

$h(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ הפונקציה מקבלת ערכים שליליים עבור $x < 0$

יתכנו כמובן גם נימוקים אחרים לאי התאמה כגון, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטה $y = 1$ לפונקציה $h(x)$, ועוד.

שאלה 2

בסרטוט נתון גרף הפונקציה $f(x)$.

עבור איזו נקודה P , $x_A \le x_P \le x_G$ יהיה הערך של $\int_{x_A}^{x_P} f(x)dx$ מקסימלי?

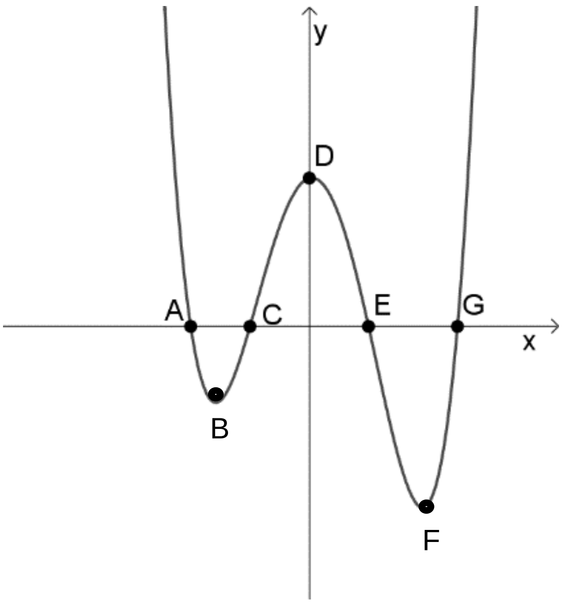
נמק תשובתך.

האינטגרל הוא פונקציית הצטברות.

כאשר הנקודה P משמאל לנקודה C ערך האינטגרל שלילי. כאשר הנקודה P נעה מימין לנקודה C נוסף גודל חיובי לצבירה. כיוון שהגרף מימין לנקודה E שוב מתחת לציר ה- x, הצבירה שם שוב מקטינה את הגודל של האינטגרל.

לכן, כדי לקבל ערך מקסימלי לאינטגרלי יש לדרוש

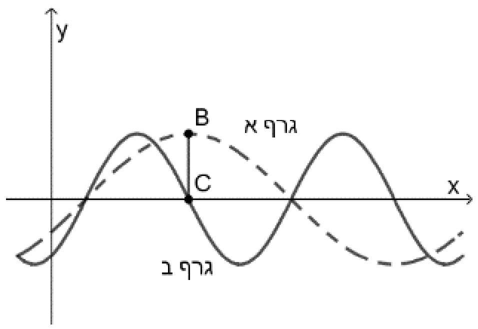
שהנקודה P תתלכד עם הנקודה E.



שאלה 3

נתונות שתי הפונקציות:

$g(x) = sin(x - \frac{\pi}{6})$,$f(x) = sin(2x - \frac{\pi}{3})$



באיור שלפניכם שני גרפים:

גרף א – מתואר בקו מקווקו

גרף ב – מתואר בקו רציף

הנקודה B נמצאת מימין לציר ה- y על גרף א, והיא הנקודה הקרובה ביותר לציר זה **בה הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי.**

הנקודה C נמצאת על גרף ב, והיא נקודת החיתוך שלו עם ציר ה- x, כמתואר בסרטוט.

מהו אורך הקטע BC? נמק היטב קביעתך.

מחזור הפונקציה $g(x)$ הוא 2π ומחזור $f(x)$ הוא $\pi = \frac{2\pi}{2}$

על פי המחזוריות ניתן לראות שגרף א מתאים לפונקציה $g(x)$

וגרף ב מתאים ל - $f(x)$.

למציאת שיעורי הנקודה B יש למצוא את שיעור נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$.

מומלץ לעודד תלמידים למצוא את הנדרש באמצעות תכונות הפונקציות הטריגונומטריות האלמנטריות וללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי:

ידוע שהפונקציה $sinx$ מקבלת מקסימום "ראשון" עבור $x = \frac{\pi}{2}$,

על כן יש לדרוש: $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, כלומר: $x = \frac{2\pi}{3}$. ערך ה- y הוא, כמובן: 1, שוב מהתכונה המוכרת של $sinx$, כלומר: $B(\frac{2\pi}{3}, 1)$

קיימת גם אפשרות לפתור את השאלה בכלים אנליטיים:

$f'(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

ומהצבת הערך שהתקבל בפונקציה לקבל גם: $B(\frac{2\pi}{3}, 1)$

למציאת שיעורי הנקודה C ניתן לפתור משוואה טריגונומטרית ולבחור את הפתרון המתאים לפי התמונה הגרפית – נקודת החיתוך השנייה ממין לראשית הצירים.

אולם, גם כאן ניתן להשתמש בתכונות של פונקציית הסינוס.

הפונקציה: $f(x) = sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = sin\left(2(x - \frac{\pi}{6}\right)$ היא הזזה ימינה של $sin\,2x$ ב- $\frac{\pi}{6}$.

הגרף של $sin\,2x$ חותך את ציר ה-x כאשר $2x$ הם כפולה שלמה של π, כלומר כאשר $x = \frac{\pi k}{2}$, k שלם.

לכן: שתי נקודות החיתוך הראשונות של $f(x)$ מימין לראשית הצירים הן:

$x_1 = 0 + \frac{\pi}{6}$,$x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$C\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$

לנקודות B ו $C -$ אותו שיעור x, לכן אורך הקטע BC הוא ערכו המוחלט של ההפרש בין שיעורי ה- y של הנקודות:

$$BC = 1 - 0 = 1$$

שאלה 4

דני ודנה מצאו את הפונקציה הקדומה $F(x)=\int sinx\cdot cosxdx$ בדרכים שונות:

פתרונו של דני:

דני זיהה את הפונקציה $sinx$ ואת הנגזרת שלה $cosx$

והראה כי $\int sinx\cdot cosxdx=\frac{sin^2x}{2}+C$

פתרונה של דנה:

דנה השתמשה בזהות הטריגונומטרית

$$2sinx\cdot cosx=sin2x$$

והראתה כי:

$$\int sinx\cdot cosxdx=\int\frac{sin2x}{2}dx=-\frac{cos2x}{4}+C$$

אבל: $-\frac{cos2x}{4}\neq\frac{sin^2x}{2}$

כיצד תסביר את התוצאות השונות?

הקבוע C אינו זהה בשתי ההצגות. למעשה היה על דנה ודני לרשום

$$\int sinx\cdot cosxdx=\frac{sin^2x}{2}+C_1$$

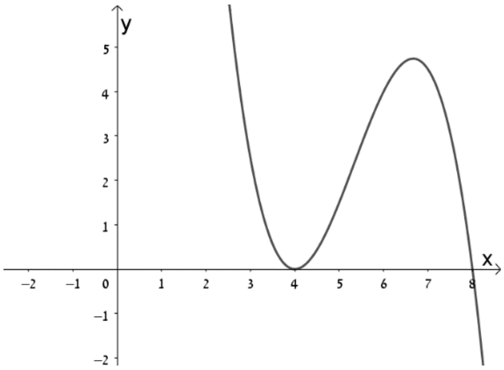
$$\int sinx\cdot cosxdx=-\frac{cos2x}{4}+C_2$$

ההפרש בין הביטוי $\frac{sin^2x}{2}$ לבטוי $-\frac{cos2x}{4}$ הוא מספר קבוע.

$$-\frac{cos2x}{4}-\frac{sin^2x}{2}=\frac{-(1-2\,sin^2x)-2sin^2x}{4}=-\frac{1}{4}$$

כלומר $C_2-C_1=-\frac{1}{4}$

שאלה 5



הגרף המצורף מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ בתחום: $3 < x < 9$

בחר מבין הטענות הבאות את הטענה הנכונה. נמק בחירתך.

I. **לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון ונקודת פיתול אחת.**

II. **לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת ושתי נקודות פיתול.**

III. **לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת ונקודת פיתול אחת.**

התשובה הנכונה: II. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת ושתי נקודות פיתול.

נקודת קיצון מתקבלת בנקודה בה הנגזרת מוגדרת ומחליפה סימן, נקודת פיתול מתקבלת בנקודה בה לנגזרת יש ערך קיצון – מקסימום או מינימום.
לכן, לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $x = 4$ בה שיפוע המשיק הוא אפס ונקודת פיתול נוספת בנקודה בה $f'(x)$ מקבלת ערך מקסימלי. בנקודה זו שיפוע המשיק לפונקציה הינו בעל ערך חיובי.
לפונקציה נקודת קיצון – מקסימום בנקודה $x = 8$.

על התלמיד להבחין בין שתי הנקודות בהן הנגזרת הראשונה מתאפסת על פי סימן הנגזרת משני צידי הנקודה. בסביבת הנקודה $x = 4$ הנגזרת חיובית ולכן הפונקציה עולה ומקבלת בה פיתול.
בנקודה $x = 8$ הנגזרת משנה סימן ולכן יש בה נקודת קיצון. הנגזרת חיובית משמאל ל- $x = 8$ ושלילית מימין. לכן הפונקציה עולה משמאל ל- $x = 8$ ויורדת מימין, ומתקבל מקסימום בנקודה ששיעור ה- x שלה הוא 8.

שאלה 6

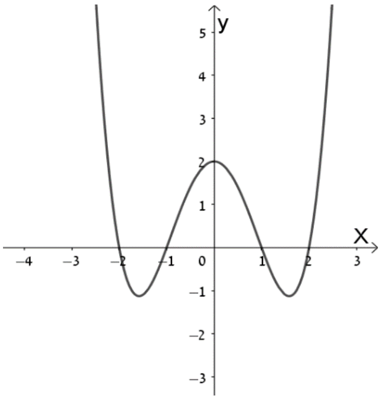
I. לפניך רשימה של ארבע פונקציות. בחר ביניהן את המתאימה לגרף א ואת המתאימה לגרף ב. נמק בחירתך.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)(x^2-4)$$

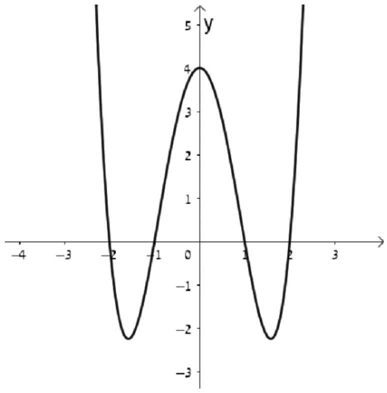
$$g(x) = (x-1)(x+1)(x-4)$$

$$m(x) = (x^2-1)+4$$

$$h(x) = (x^2-1)(x^2-4)$$



גרף ב



גרף א

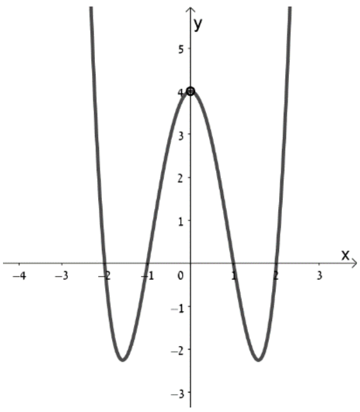
על פי נקודות החיתוך עם הצירים:

לפונקציות $f(x)$ ו - $h(x)$ ארבע נקודות חיתוך עם ציר ה – x.

הפונקציה $h(x) = (x^2-1)(x^2-4)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0,4)$ ולכן מתאימה לגרף א,

הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)(x^2-4)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0,2)$ ולכן מתאימה לגרף ב.

גרף ג



II. הפונקציה המתוארת בגרף ג' אינה מוגדרת ב – $x=0$ רשום ביטוי לפונקציה המתאימה לגרף.

גרף ג "כמעט" מתלכד עם גרף א.

לפונקציה המתוארת בו יש נקודה חסרה, "חור" עבור $x=0$.

ה"חור" יכול להיווצר על ידי הכפלת $f(x)$ ב- $\frac{x}{x}$.

מכאן אפשר להציע את הביטוי:

$$y = \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{x}$$

שאלה 7

לפניך שתי טענות: קבע עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או אינה נכונה. נמק תשובתך.

ניתן לנמק באמצעות סרטוט גרפים.

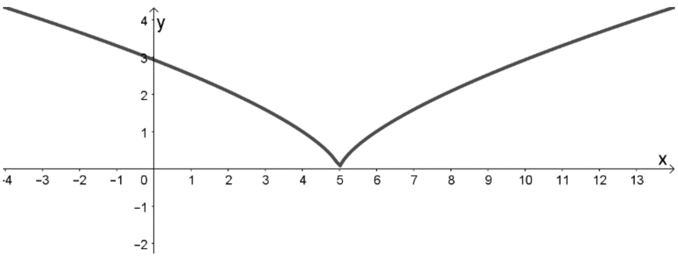
I. **אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום ב- $x=5$ אז $f'(5)=0$.**

הטענה אינה נכונה.

דוגמה נגדית $f(x)=|x-5|$. הפונקציה אינה גזירה בנקודה $x=5$

כדוגמה נגדית באמצעות סרטוט, ניתן להציג כל פונקציה שאינה גזירה ב- $x=5$ ויש בה נקודת מינימום.

לדוגמה: $f(x)=(x-5)^{\frac{2}{3}}$



יותר מכך: מספיק לתת דוגמא גרפית גם ללא ביטוי אלגברי.

II. **אם $f'(x_0)=0$ אז ב- x_0 יש לפונקציה נקודת מינימום או מקסימום.**

הטענה אינה נכונה.

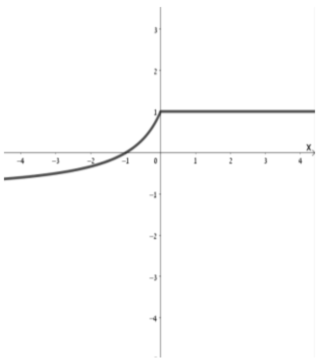
ב- x_0 יכולה לפונקציה להיות נקודת פיתול בה שיפוע המשיק הוא אפס.

לדוגמה: $f(x)=(x-5)^3$.

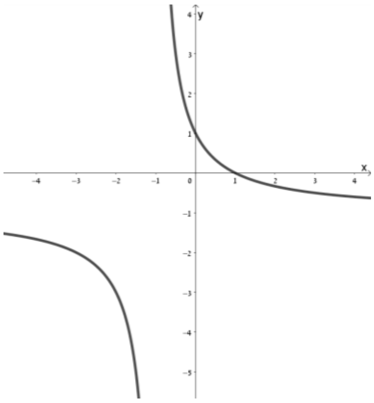
שאלה 8

לפניך חמישה גרפים ורשימה של ארבע פונקציות. התאם בין הגרפים לפונקציות, נמק בחירתך.

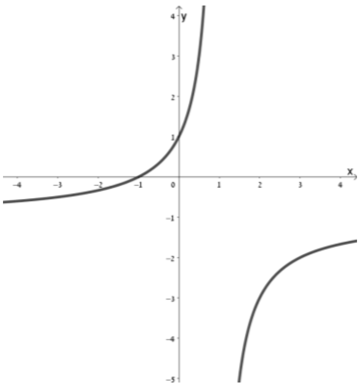
○ $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$; $g(x)=\frac{1-x}{1+x}$; $h(x)=\frac{1-|x|}{1-x}$ $m(x)=\frac{1-x}{1+|x|}$



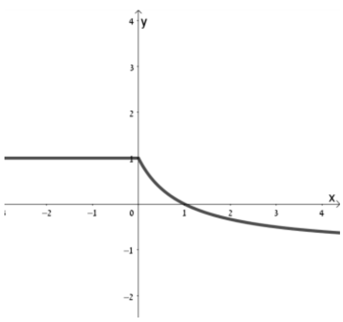
גרף א



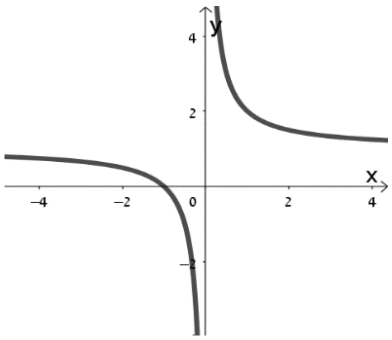
גרף ב



גרף ג



גרף ד



גרף ה

$f(x)$ מתאימה לגרף ג

$g(x)$ מתאימה לגרף ב

$h(x)$ מתאימה לגרף א

$m(x)$ מתאימה לגרף ד

את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו - $g(x)$ ניתן לזהות על פי נקודות החיתוך עם ציר ה- x, נקודות אי ההגדרה וחיוביות/שליליות הפונקציות.

את הפונקציות $h(x)$ ו - $m(x)$ בהן מופיע $|x|$ נפצל לשני ענפים.

$$h(x)=\frac{1-|x|}{1-x}=\begin{cases}1 & , \quad x>0\,,\mathrm{x}\neq 1\\ \dfrac{1+x}{1-x} & , \quad x<0\end{cases}$$

כלומר עבור $x<0$ הפונקציה מתלכדת עם משוואת $f(x)$ ולכן הגרף המתאים הוא א.

$$m(x)=\frac{1-x}{1+|x|}=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1+x} & , \quad x>0\\ 1 & \quad \mathrm{x}<0\end{cases}$$

כלומר עבור $x>0$ הפונקציה מתלכדת עם משוואת $g(x)$ ולכן הגרף המתאים הוא ד.

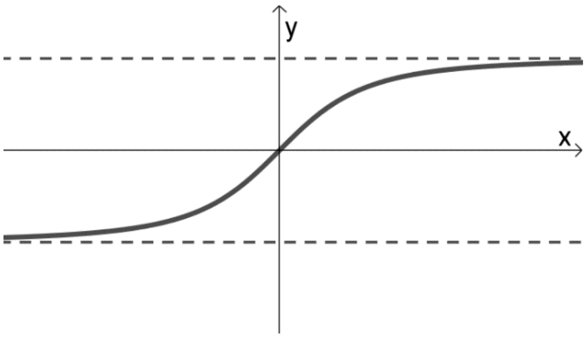
שאלה 9

בדוק נכונות/אי נכונות הטענה הבאה. נמק.
ניתן לנמק גם באמצעות סרטוט גרפים.

אם $f'(x) > 0$ לכל מספר x, אז כאשר $x \to \infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- ∞.

הטענה אינה נכונה.

הפונקציה שבסרטוט $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ עולה לכל x, בדקו שאכן $f'(x_0) > 0$ לכל x ויש לה שתי אסימפטוטות מקבילות לציר x - אילו הן?



שאלה 10

נתונה פונקציה $f(x)$.

דני הזיז את גרף הפונקציה הנתונה ב- $\frac{\pi}{2}$ יחידות ימינה,

דנה הזיזה את גרף הפונקציה הנתונה ב- 2.5π יחידות שמאלה.

שניהם קבלו גרפים זהים.

אילו מהפונקציות הבאות יכולה להיות $f(x)$? הקף בעיגול ונמק.

$y = 3sinx$; $y = sin3x$; $y = sin2x$; $y = sin6x$

$y = sinx$; $y = tanx$

דני הזיז את הפונקציה ב - $\frac{\pi}{2}$ ימינה ודנה ב- 2.5π שמאלה. לכן הפער ביניהן הוא $T = 3\pi$. נבדוק השפעת המחזור על הפונקציות.

1. $y = 3sinx$:

$3\sin(x+3\pi) = 3\sin(x+\pi) = -3sinx \neq 3sinx$

2. $y = sin3x$:

$\mathrm{Sin}(3(x+3\pi) = \sin(3x+9\pi) = \sin(3x+\pi) = -sin3x \neq sin3x$

3. $y = sin2x$:

$\sin 2(x+3\pi) = \sin(2x+6\pi) = sin2x$

4. $y = sin6x$:

$\sin 6(x+3\pi) = \sin(6x+18\pi) = sin6x$

5. $y = sinx$:

$\sin(x+3\pi) = \sin(x+\pi) \neq sinx$

6. $y = tanx$:

$tan(x+3\pi) = tanx$

הפונקציות $y = sin2x$; $y = sin6x$; $y = tanx$ יכולות להיות $f(x)$.

יתכן שחלק מהתלמידים יתייחסו להזזות של כל פונקציה בנפרד וישוו ביניהן.

לדוגמה: $y = sin2x$ מתאימה כי:

$\sin 2(x-\frac{\pi}{2}) = \sin(2x-\pi) = -sin2x$ הזזה של דני ימינה

$\sin 2(x+\frac{5\pi}{2}) = \sin(2x+5\pi) = -sin2x$ הזזה של דנה שמאלה

שאלה 11

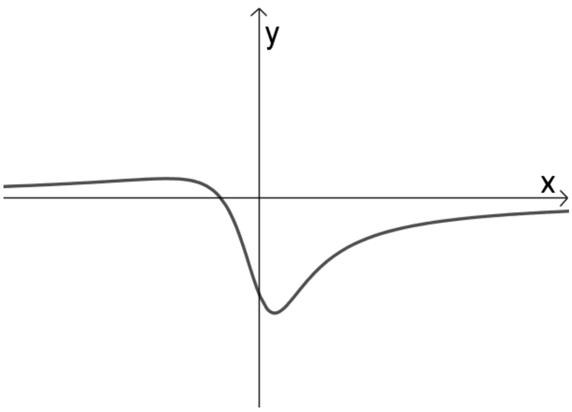
בדוק נכונות/אי נכונות של הטענות הבאות. אם הטענה אינה נכונה, הצג דוגמה נגדית.
ניתן לנמק גם באמצעות סרטוט גרפים.

I. **אם ב - x_0 יש לפונקציה נקודת פיתול אז $f'(x_0) = 0$.**

הטענה אינה נכונה: לפונקציה תיתכן נקודת פיתול, שינוי בסימן $f''(x)$ או שינוי בקעירות למעלה/למטה, גם כאשר $f'(x_0) \neq 0$. במקרה זה שיפוע המשיק בנקודת הפיתול שונה מאפס.
דוגמאות נגדיות: $y = sinx$ בנקודה $x_0 = \pi$.
$y = x(x^2 - 1)$ בנקודה $x_0 = 0$
נימוק ניתן לתת גם באמצעות סרטוט ללא הצגה אלגברית של הפונקציות.
התלמידים נתקלים לראשונה בנקודת הפיתול של הפונקציה $y = x^3$ בה שיפוע הפונקציה הוא אפס, עוד טרם העיסוק בסימן הנגזרת השנייה.
מכאן הטעות השכיחה שנקודת פיתול מתקבלת רק כאשר $f'(x_0) = 0$.

II. **פונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.**

הטענה אינה נכונה:
דוגמה נגדית:

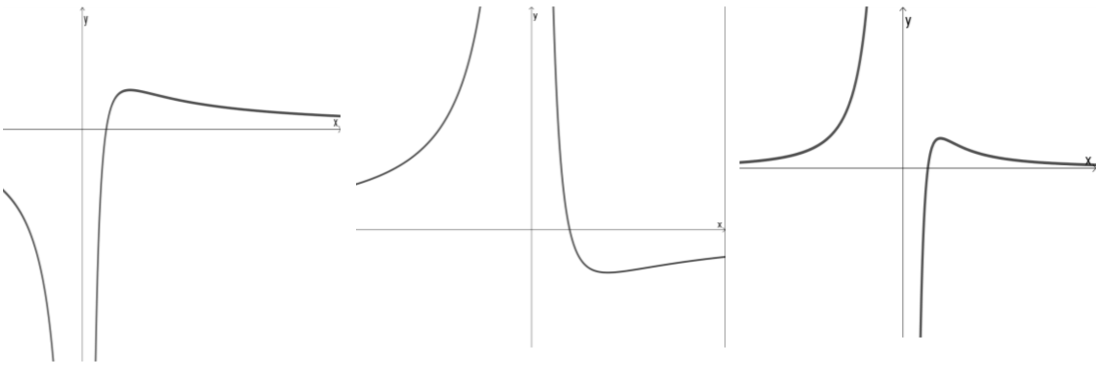


אפשר להסתפק בייצוג גרפי,
אפשר להציע ביטוי. למשל:
$f(x) = -\frac{x+1}{x^2+1}$
האסימפטוטה האופקית היא $y = 0$,
והפונקציה חותכת את ציר ה $x -$.
עודדו את התלמידים ליצור עוד ייצוגים גרפיים ואלגבריים עם שתי נקודות חיתוך עם האסימפטוטה האופקית, שלוש נקודות חיתוך, וכן הלאה.

שאלה 12

התאם את הגרף המתאים לכל אחת מהפונקציות הבאות, נמק בחירתך.

$$g(x)=\frac{8(2-x)}{x^2} \quad ; \quad f(x)=\frac{8(x-2)}{x^2} \quad ; \quad m(x)=\frac{27(x-2)}{x^3}$$



גרף א   גרף ב   גרף ג

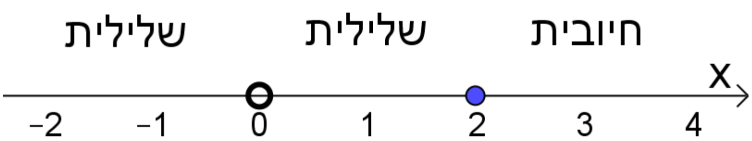
שלוש הפונקציות חותכות את ציר ה- x בנקודה $x=2$, ולכולן אסימפטוטה אנכית זהה ואסימפטוטה אופקית זהה.

התאמה תתבצע על פי תחומי חיוביות/שליליות. נסמן על הציר את נקודת החיתוך ונקודת אי ההגדרה.

גרף א מתאים ל - $m(x)$

גרף ב מתאים ל- $g(x)$

גרף ג מתאים ל - $f(x)$



שאלה 13

נתונות שלוש פונקציות.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4} \quad ; \quad g(x)=\frac{x^2}{x^2-4} \quad ; \quad h(x)=\frac{x^4}{x(x^2-1)}$$

בחר את הפונקציה המקיימת את התכונה הבאה:

לפונקציה אסימפטוטה אופקית אחת, שתי אסימפטוטות אנכיות, ונקודת השקה אחת לציר ה-x.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4} \quad ; \quad g(x)=\frac{x^2}{x^2-4} \quad ; \quad h(x)=\frac{x^4}{x(x^2-1)}$$

1. נקודת השקה לציר ה – x תיתכן רק עבור $g(x)$ ו - $h(x)$, בשתיהן מופיע הגורם x^2 או x^4 בנקודת המגע עם ציר ה- x.
2. לפונקציה $h(x)=\frac{x^4}{x(x^2-1)}$ אין אסימפטוטה אופקית, (יש בה גורם x^4 במונה וגורם ממעלה שלישית במכנה),
כלומר עבור $x\to\infty$ יתקבל $h(x)\to\infty$ ועבור $x\to-\infty$ יתקבל $h(x)\to-\infty$.
הפונקציה המקיימת את התכונה המבוקשת היא $g(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$.
הפונקציה משיקה לציר ה- x בראשית הצירים, בעלת שתי אסימפטוטות אנכיות $x=\pm2$ ובעלת אסימפטוטה אופקית $y=1$

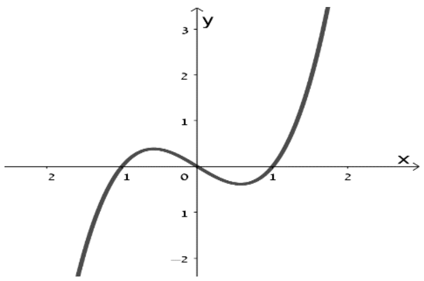
שאלה 14

קבע האם נכונות הטענות הבאות: נמק קביעותיך, במידת הצורך באמצעות דוגמאות נגדיות.

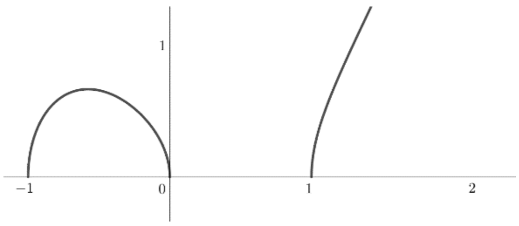
- **אם $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, אז גם הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ הינה פונקציה אי זוגית.**

הטענה אינה נכונה.

1. בפונקציה אי-זוגית לכל נקודה $(x, f(x))$ השייכת לפונקציה גם הנקודה $(-x, -f(-x)$ שייכת לה. כלומר הפונקציה מקבלת ערכים שוני סימן עבור הקרניים $x > 0$ ו- $x < 0$. לעומת זאת: הפונקציה $h(x) = \sqrt{f(x)}$ מקבלת ערכים אי- שליליים בלבד.
2. דוגמה נגדית:
$y = x(x^2 - 1)$ פונקציה אי-זוגית.



$y = \sqrt{x(x^2 - 1)}$ אינה פונקציה אי-זוגית.



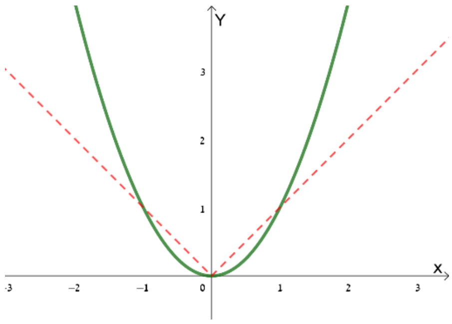
- **אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית, אז בהכרח גם הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ הינה פונקציה זוגית.**

הטענה אינה נכונה.

הטענה אינה נכונה לכל הפונקציות הזוגיות:

- אם הגרף של הפונקציה הזוגית כולו מתחת לציר ה- x, הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ אינה מוגדרת כלל.
דוגמא: $f(x) = -x^2 - 5$
- אם לפונקציה הזוגית יש חלקים של גרף שנמצאים לא מתחת לציר ה-x, הטענה נכונה.

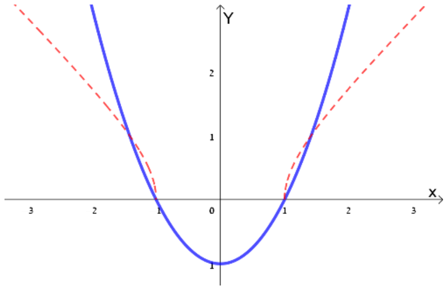
$$h(-x) = \sqrt{f(-x)} = \sqrt{f(x)} = h(x)$$



דוגמה: $f(x) = x^2$

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$

- לעיתים הטענה נכונה עבור התחום החלקי, של $f(x)$ בו היא מקבלת ערכים חיוביים:



דוגמה: $f(x) = x^2 - 1$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$ הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ זוגית

ואינה מוגדרת בתחום $-1 < x < 1$

שאלה 15

הראה כי הפונקציה: $f(x)=x-\frac{sinx}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ חותכת את ציר ה- x בנקודה בה $x=\frac{\pi}{4}$.

- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם קיימים)? הוכח קביעתך.
- הוכח שהנקודה $(\frac{\pi}{4},0)$ היא נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה-x.

- נגזור את הפונקציה:

$$f'(x)=1-\frac{cosx}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-cosx}{\sqrt{2}} \quad ;\sqrt{2}-cosx>0$$

כלומר: $f'(x)>0$ ולכן הפונקציה עולה לכל x.

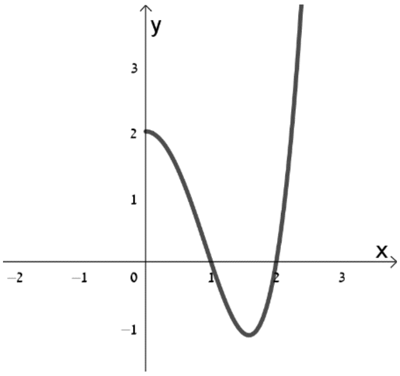
- מהצבת $x=\frac{\pi}{4}$ בפונקציה, $\frac{\pi}{4}-\frac{sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=0$,

נסיק שהיא חותכת את ציר ה- x בנקודה $(\frac{\pi}{4},0)$.

כיוון שהפונקציה **עולה** לכל x, הרי שנקודת החיתוך היא **יחידה**.

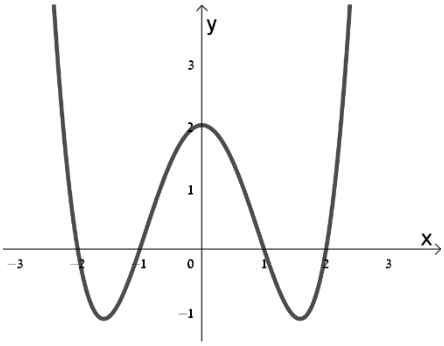
שאלה 16

נתונה $f(x)$, פונקציה המוגדרת לכל x.
חלק מגרף הפונקציה מוצג בסרטוט כאשר $x \geq 0$.



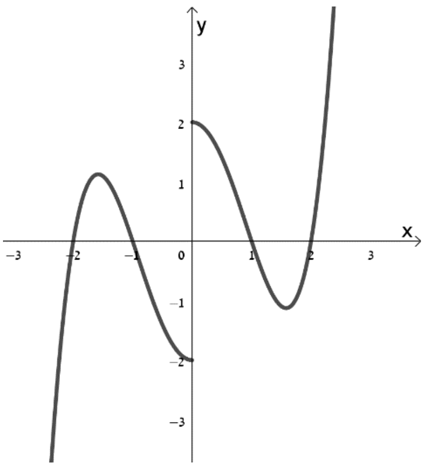
א. השלם את הסרטוט אם הפונקציה היא זוגית.

השלמת הסרטוט היא שיקוף חלק הגרף עבור $x \geq 0$ בציר y.



ב. האם ייתכן שהפונקציה היא אי- זוגית?

הפונקציה אינה יכולה להיות אי-זוגית. כאשר פונקציה אי-זוגית מוגדרת בנקודה בה $x = 0$ היא חייבת לעבור בנקודה $(0,0)$ לצורך קיום התנאי $f(x) = -f(-x)$.
במקרה זה $f(0) = 2$.
אם התנאי בשאלה היה שחלק הגרף המוצג בתחום הוא $x > 0$ ולא $x \geq 0$, תיתכן כפי שמוצג בסרטוט, פונקציה אי-זוגית.
יש להקפיד להוסיף בסרטוט את הנקודה $A(0,0)$.



שאלה 17

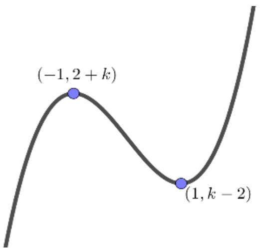
$f(x)$ פונקציה בעלת גרף רציף (שניתן לסרטט במשיכת קולמוס אחת)
המוגדרת לכל x.

ידוע כי: $f(10) = 100 \quad ; \quad f(-10) = -20$

לפונקציה שתי נקודות קיצון בלבד:

מקסימום בנקודה $(-1\,, 2+k)$ ומינימום בנקודה $(1\,, k-2)$.

עבור אילו ערכי k, תחתוך הפונקציה את ציר ה x – בשלוש נקודות שונות?



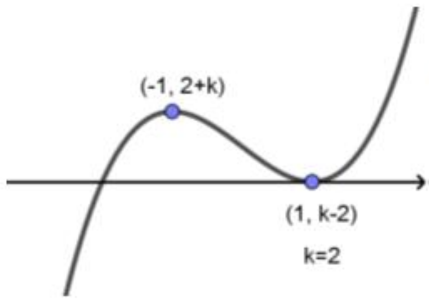
$f\ (x)$ מקבלת מקסימום מקומי שערכו $2+k$ ומינימום מקומי שערכו $k-2$.

לגרף של $f(x)$ יש על פי הנתונים צורה כללית כזו:

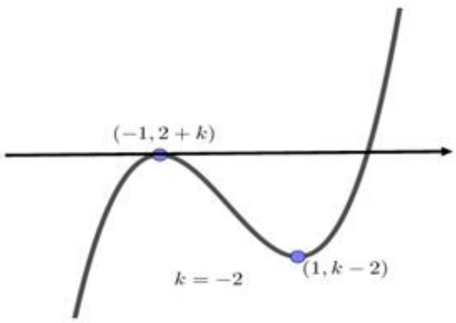
המצבים האפשריים הם:

(כדאי לדון עם התלמידים במצבים האפשריים).

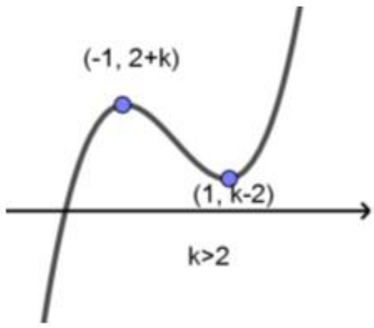
א.



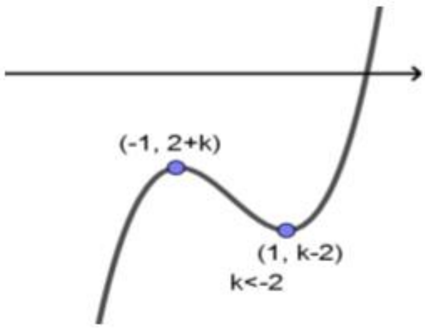
ב.

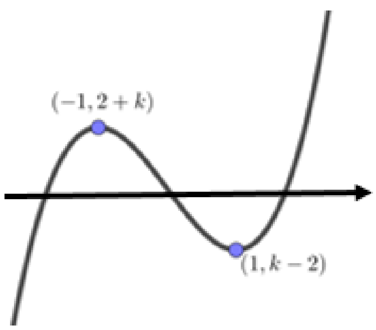


ג.



ד.





שלוש נקודות חיתוך קיימות במצב:

$f\ (x)$ מקבלת מקסימום מקומי שערכו $2+k$

ומינימום מקומי שערכו $k-2$.

ההפרש ביניהם $2+k-(k-2)=4$.

לכן

$0<2+k<4$, כלומר $-2<k<2$

וגם

$-4<k-2<0$ כלומר $-2<k<2$

שאלה 18

לפניך שלוש פונקציות:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)} \quad ; \quad g(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$$

$$h(x)=\frac{x^3-1}{(x-2)(x+1)}$$

לאיזו מהן התכונה הבאה:

לפונקציה יש שתי נקודות אי הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת.

נמק בחירתך גם על ידי הסבר להתאמה וגם על ידי פסילת האחרות.

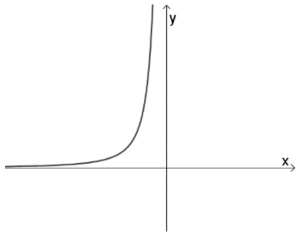
1. שתי נקודות אי הגדרה: לכל שלוש הפונקציות יש שתי נקודות אי הגדרה.
2. אסימפטוטה אופקית אחת: לפונקציות $g(x)$ ו - $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=1$ הפונקציה $h(x)$ שואפת לאינסוף עבור $x\to\infty$ ושואפת למינוס אינסוף עבור $x\to-\infty$.
3. כדי שתתקבל אסימפטוטה אנכית אחת, בפונקציה בעלת שתי נקודות אי הגדרה, באחת מהן תהיה נקודת אי-רציפות סליקה – "חור". הנקודה החסרה תתקבל בפונקציה $f(x)$,

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}$$

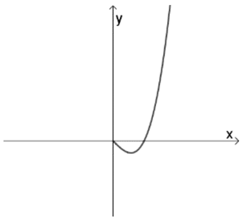
בה, כאשר מציגים את הפונקציה כמכפלה/מנה של גורמים ליניאריים, מגלים את הגורם הזהה $(x+1)$ במונה ובמכנה.

שאלה 19

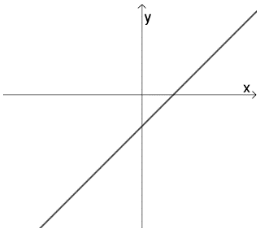
לפניך גרפים חלקיים של פונקציות. רשום אילו גרפים ניתן להשלים לגרף של פונקציה זוגית, אילו לפונקציה אי זוגית ואילו גרפים לא יתארו פונקציה זוגית ולא אי זוגית.



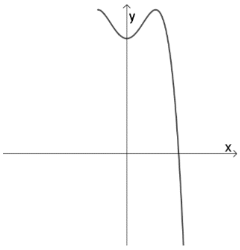
גרף א



גרף ב

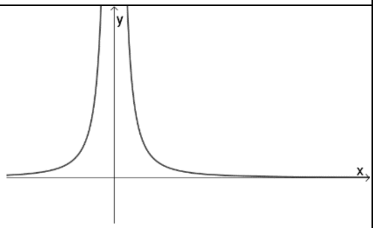
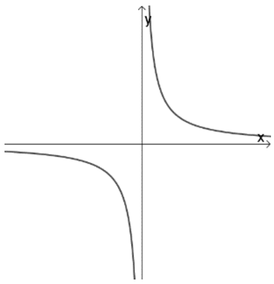
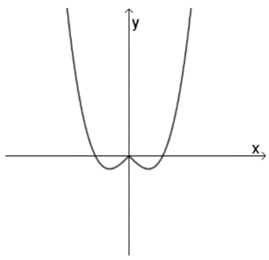
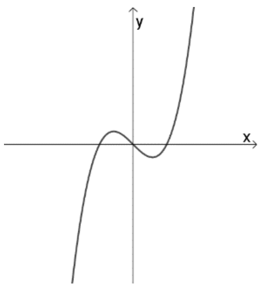
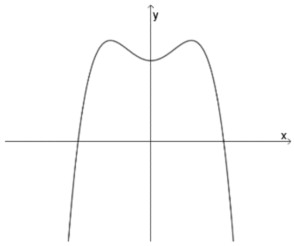


גרף ג



גרף ד

לפי המתואר בטבלה גרפים א ו ב ניתן להשלים לפונקציה זוגית או אי- זוגית. גרף ד ניתן להשלים לפונקציה זוגית בלבד

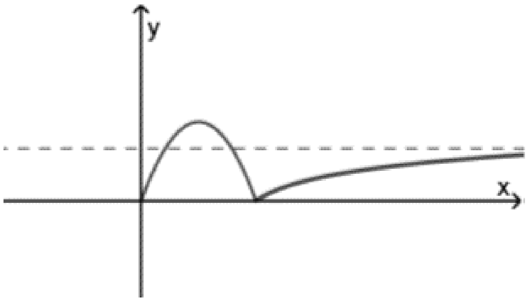
	פונקציה זוגית	**פונקציה אי-זוגית**	**לא זוגית ולא אי-זוגית**
גרף א			
גרף ב			
גרף ג			לא זוגית ולא אי-זוגית
גרף ד			

שאלה 20

בדוק נכונות/אי נכונות הטענה הבאה. נמק. ניתן לנמק גם באמצעות סרטוט גרפים.

אם לפונקציה $f(x)$, המוגדרת עבור $x > 0$, יש נקודת קיצון בנקודה $(5,4)$, $f'(5) = 0$ ואסימפטוטה אופקית $y = 1$ אז לפונקציה יש לפחות נקודת פיתול אחת.

הטענה אינה נכונה: הפונקציה המתוארת בגרף קעורה כלפי מטה ואין לה נקודת פיתול.

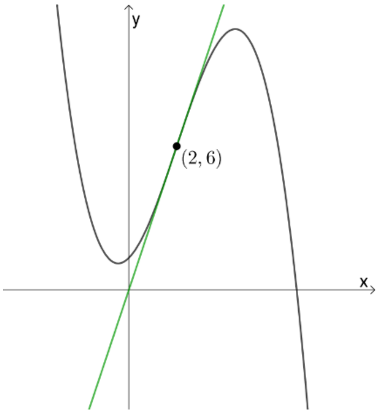


אם נדרוש בנוסף לנתון בשאלה, שהנגזרת של הפונקציה תהיה קיימת בכל נקודה בתחום ההגדרה, הטענה תהיה נכונה. מומלץ להציע לתלמידים לסרטט סקיצות לפונקציה כזו עם נקודת פיתול אחת, שתי נקודות פיתול ויותר.

שאלה 21

בדוק נכונות/אי נכונות הטענה הבאה. נמק. ניתן לנמק גם באמצעות סרטוט גרפים.

אם $f''(x)$ משנה סימן בנקודה $(2,6)$ אז לא ייתכן שמשוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה היא $y=3x$



הטענה אינה נכונה.
בגרף המתואר , בנקודות הפיתול $(2,6)$ בה $f''(x)$ משנה סימן, שיפוע המשיק יכול לקבל כל ערך חיובי ולכן גם 3.

כהעמקה ניתן לבנות ייצוג אלגברי של פונקציה המקיימת את דרישות הטענה.

נדרוש איפוס והחלפת סימן של הנגזרת השנייה עבור $x=2$:

$$f''(x)=2-x$$

נמצא נגזרת ראשונה על ידי מציאת פונקציה קדומה והתאמת קבוע האינטגרציה, כך שיתקבל: $f'(2)=3$, השיפוע 3 של המשיק:

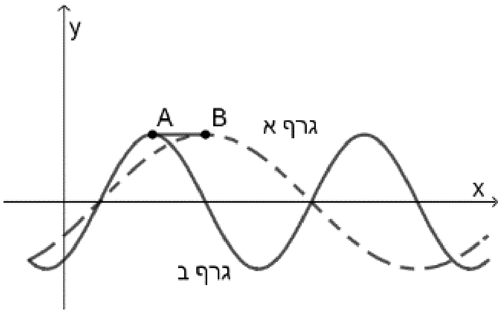
$$f'(x)=2x-\frac{x^2}{2}+1$$

נמצא את הפונקציה המבוקשת על ידי מציאת פונקציה קדומה והתאמת קבוע האינטגרציה לנקודה $(2,6)$:

$$f(x)=x^2-\frac{x^3}{6}+x+\frac{8}{6}$$

שאלה 22

נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = sin(2x - \frac{\pi}{3})$, $g(x) = sin(x - \frac{\pi}{6})$



באיור שלפניכם שני גרפים:

גרף א – מתואר בקו מקווקו

גרף ב – מתואר בקו רציף

הנקודות A ו- B נמצאות מימין לציר ה-y והן הנקודות הקרובות ביותר לציר זה **בהן הפונקציות מקבלות ערכים מקסימליים**.

מהו אורך הקטע AB? נמק קביעתך.

מחזור הפונקציה $g(x)$ הוא 2π ומחזור $f(x)$ הוא $\pi = \frac{2\pi}{2}$

על פי המחזוריות ניתן לראות שגרף א מתאים לפונקציה $g(x)$
וגרף ב מתאים ל - $f(x)$.

נמצא את נקודות המקסימום של כל פונקציה:
ניתן למצוא את הנקודות באמצעות נגזרת:

$$f'(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$$
$$g'(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$$

לכן: $B(\frac{2}{3}\pi, 1)$ ו- $A\left(\frac{5}{12}\pi, 1\right)$

ניתן למצוא את הנקודות מתוך ניתוח תכונות של הפונקציות הטריגונומטריות.
ראו הסבר לשאלה 3.

אורך הקטע AB הוא הערך המוחלט של ההפרש בין ערכי ה- x של הנקודות:

$$\frac{2}{3}\pi - \frac{5}{12}\pi = \frac{3}{12}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

שאלה 23

בדוק נכונות/אי נכונות הטענה הבאה.
אם הטענה נכונה – הוכח אותה, אם לא – הצג דוגמה נגדית.

הטענה:

"הפונקציה הקדומה של כל פונקציה זוגית היא פונקציה אי זוגית"

הטענה אינה נכונה.

דוגמה נגדית ניתן לייצר מכל פונקציה זוגית שיש לה פונקציה קדומה, על ידי בחירת קבוע אינטגרציה שיפגום בסימטריה הסיבובית הנדרשת.

למשל : $f(x) = x^2$

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

אמנם עבור $C = 0$ מתקבלת פונקציה אי זוגית,

אך עבור $C = 1$ מתקבלת הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ שאינה אי זוגית.

כדאי לשים לב שאין הכרח שהפונקציה הזוגית תהיה מוגדרת באפס.

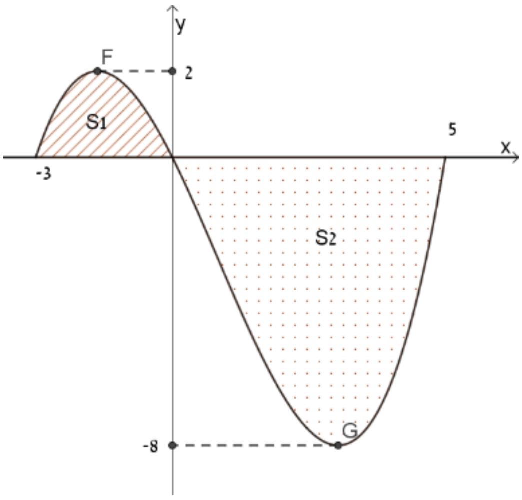
כך למשל, אם: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

אזי פונקציה קדומה לה היא כל פונקציה מהמשפחה: $f(x) = -\frac{1}{x} + C$

שוב: עבור $C = 0$ מתקבלת פונקציה אי זוגית, אך עבור כל ערך אחר תתקבל פונקציה שאינה זוגית ואינה אי זוגית.

שאלה 24

בסרטוט שלפניך מתואר גרף של פונקציה ושני שטחים, S_1 ו- S_2 כלואים בין הגרף לבין ציר ה- x. ידוע כי הפונקציה קעורה כלפי מטה משמאל לראשית הצירים וקעורה כלפי מעלה מימין לראשית הצירים.



הביט בסרטוט ובנתונים הנוספים המסומנים בו וקבע עבור כל אחת מהטענות בהמשך האם היא נכונה או לא נכונה. נמק קביעותיך.

בשאלה מודגש ההבדל בין הערך המספרי של האינטגרל שיכול לקבל כל ערך ממשי, לבין גודל השטח, שהוא בהכרה אי-שלילי (ואף חיובי), בצד אומדן שטחים באמצעות שטח משולש.

1. $S_1 > 3$

הטענה נכונה.
בתוך השטח S_1 חסום משולש ששטחו $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$

2. $20 < \int_0^5 f(x)dx < 40$

הטענה אינה נכונה.
גודל האינטגרל $\int_0^5 f(x)dx$ הוא שלילי.

3. $\int_{-3}^5 f(x)dx < 0$

הטענה נכונה.
השטח שמתחת לציר ה- x (S_2) גדול מהשטח S_1 שמעל הציר, לכן ערך האינטגרל, השווה לערך המספרי: $S_1 - S_2$, יהיה שלילי.
ניתן להצדיק כי $S_1 < S_2$ על ידי חסימת S_1 במלבן ששטחו 6 יחידות שטח, ועל ידי חסימת משולש ששטחו 20 יחידות שטח בתוך S_2.

שאלה 25

לאיזו/אילו מהפונקציות הבאות יש שתי אסימפטוטות אנכיות ושתי אסימפטוטות אופקיות? נמק תשובתך.

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-12} \qquad g(x)=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+x-12}$$

$$m(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-12} \qquad h(x)=\frac{x\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x^2+x-12}$$

לכל הפונקציות אותו מכנה, לכן יהיו מועמדים זהים לאסימפטוטות אנכיות.
המכנה מתאפס כאשר:
$x^2+x-12=0 \rightarrow x_1=3;\ x_2=-4$

אסימפטוטות אנכיות אפשריות הן : $x=3$; $x=-4$
יש לבדוק על פי תחום ההגדרה של הפונקציות האם הן אכן קיימות.

1. תחום ההגדרה של הפונקציה: $g(x)=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+x-12}$ הוא: $-2\le x\le 2$
לכן: אין לה אסימפטוטות אנכיות.

2. תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)=\frac{x\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x^2+x-12}$ הוא: $x\ge 2$, לכן יש אסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

3. לפונקציה $m(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-12}$ אכן יש שתי אסימפטוטות אנכיות, אך יש לה אסימפטוטה אופקית אחת $y=0$.

4. לפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-12}$ שתי אסימפטוטות אנכיות ושתי אסימפטוטות אופקיות.

$$\frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-12}=\frac{x\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}=\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}$$
$$\downarrow$$

הביטויים המייצגים שברים: $\frac{4}{x^2}$, $\frac{12}{x^2}$, $\frac{1}{x}$, שואפים לאפס כאשר ערכו המוחלט של המכנה גדל מאד,
מכאן קל לראות, שעבור מספרים חיוביים שואפים לאינסוף המונה והמכנה חיוביים ומנתם שואפת ל- $(+1)$,
עבור מספרים שליליים שואפים למינוס אינסוף המונה חיובי והמכנה שלילי ומנתם שואפת ל- (-1). כלומר:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-12}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}=(-1)$$

מכאן:

הישר: $y=1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה המקבילה לציר ה – x בקרן הימנית/חיובית של הציר, והישר: $y=-1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה המקבילה לציר ה- x בקרן השמאלית/שלילית שלו.

לפונקציה שתי נקודות אי הגדרה המאפסות את המכנה ולא מאפסות את המונה לכן $x=3$ ו $x=-4$ שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x.

לאחר הדיון בשאלה ניתן להציג שתי בעיות דומות:

א. הראה שלא תהיינה שתי אסימפטוטות אנכיות ושתי אסימפטוטות אופקיות לאף אחת מארבע הפונקציות הבאות. נמק תשובתך.

$g(x)=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$	$f(x)=\frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2-2x-3}$
$m(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-2x-3}$	$h(x)=\frac{x\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x^2-2x-3}$

$$x_2=-1;\ x_1=3 \leftarrow x^2-2x-3=0$$

אסימפטוטות אנכיות **אפשריות** הן $x=3$; $x=-1$.

תחומי ההגדרה של הפונקציות הם (התאימו בין התחומים לפונקציות):

$\{x>2$ או $x\le-2\}$, $-2\le x<2$, $x>2$

באף אחד מהתחומים לא נמצאות שתי נקודות האיפוס של המכנה.

ב. לאיזו/אילו מהפונקציות הבאות יש שתי אסימפטוטות אנכיות ושתי אסימפטוטות אופקיות? נמק תשובתך.

ברשימה זו מופיע הגורם $(x-2)$ במונה ובמכנה במעריכים שונים!

$x_2=-3;\ x_1=2 \leftarrow x^2+x-6=0$

$f(x)=\frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-6}$	$g(x)=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+x-6}$
$h(x)=\frac{x\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x^2+x-6}$	$m(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-6}$

אסימפטוטות אנכיות **אפשריות** הן $x=2$; $x=-3$.

1. תחום ההגדרה של $g(x)=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+x-6}$ הוא: $-2\le x<2$
אין אסימפטוטות אופקיות.

2. תחום ההגדרה של $h(x)=\frac{x\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x^2+x-6}$ הוא: $x>2$.
יש אסימפטוטה אנכית אחת ואופקית אחת.

3. לפונקציה $m(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-6}$ יש אסימפטוטה אופקית אחת $y=0$

4. לפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-6}$ יש שתי אסימפטוטות אנכיות ושתי
אסימפטוטות אופקיות כנדרש.

במציאת האסימפטוטות יש לדון בעובדה שהגורם $(x-2)$ מופיע במכנה והגורם $\sqrt{x-2}$ מופיע במונה, לכן קיימת אסימפטוטה אנכית $x=2$.

אסימפטוטות נוספות: $y=-1\quad y=1\quad;\quad x=-3$

שאלה 26

קבע אילו מהטענות הבאות נכונות,
הצדק קביעותיך.

- **הגרף של הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ הוא הזזה של הגרף של $g(x) = \cos(x)$ ימינה ב- $\frac{\pi}{2}$.**

הטענה נכונה

ניתן להוכיח באמצעות זהויות טריגונומטריות. למשל כך:

$$cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) = sin(\pi - x) = sinx$$

או כך:

$$cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = cosxcos\frac{\pi}{2} + sinxsin\frac{\pi}{2} = 0 + sinx = sinx$$

- **הגרף של הפונקציה $g(x) = \cos(x)$ הוא הזזה של הגרף של $f(x) = \sin(x)$ ימינה ב- $\frac{\pi}{2}$.**

הטענה אינה נכונה

גם כאן ניתן להשתמש בכל אחת מהדרכים:

$$sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) = cos(\pi - x) = -cosx$$

או כך:

$$sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = sinxcos\frac{\pi}{2} - cosxsin\frac{\pi}{2} = 0 - cosx = -cosx$$

- **הגרף של $f(x) = \sin(-x)$ מתלכד עם הגרף של $h(x) = \sin(\pi + x)$.**

הטענה נכונה

$$f(x) = \sin(-x) = -sinx$$

$$h(x) = sin(\pi + x) = sin\pi cosx + sinxcos\pi = 0 - sinx = -sinx$$

שאלה 27

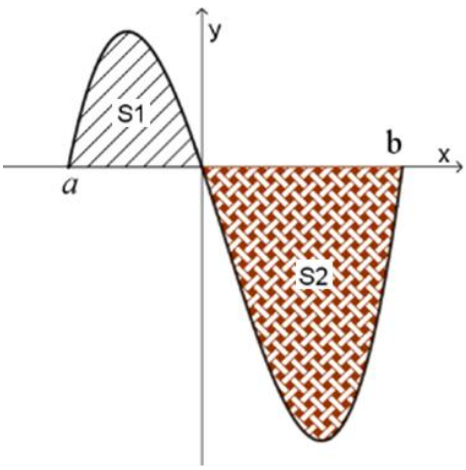
בסרטוט שלפניכם מתואר גרף של פונקציה ושני שטחים, S_1 ו- S_2 כלואים בין הגרף לבין ציר ה- x.

ידוע כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים, ובנקודות: $(a,0)$, $(b,0)$.

כמו כן:

- הגרף קעור מטה משמאל לראשית הצירים וקעור כלפי מעלה מימין לראשית הצירים,
- $|a| \cdot \max(f(x)) < \frac{b \cdot |\min(f(x))|}{2}$

קבעו עבור כל אחת מהטענות בהמשך האם היא נכונה או לא נכונה. נמקו קביעותיכם.



1. $\int_a^b f(x)dx > 0$

הטענה אינה נכונה.

האינטגרל $\int_0^b f(x)dx$ שלילי וגדול בערכו המוחלט מהאינטגרל $\int_a^0 f(x)dx$ החיובי .

2. $\int_a^b f(x)dx < 0$

הטענה נכונה.

האינטגרל $\int_0^b f(x)dx$ שלילי וגדול בערכו המוחלט מהאינטגרל $\int_a^0 f(x)dx$ החיובי .

3. $S_1 + S_2 = \int_a^b f(x)dx$

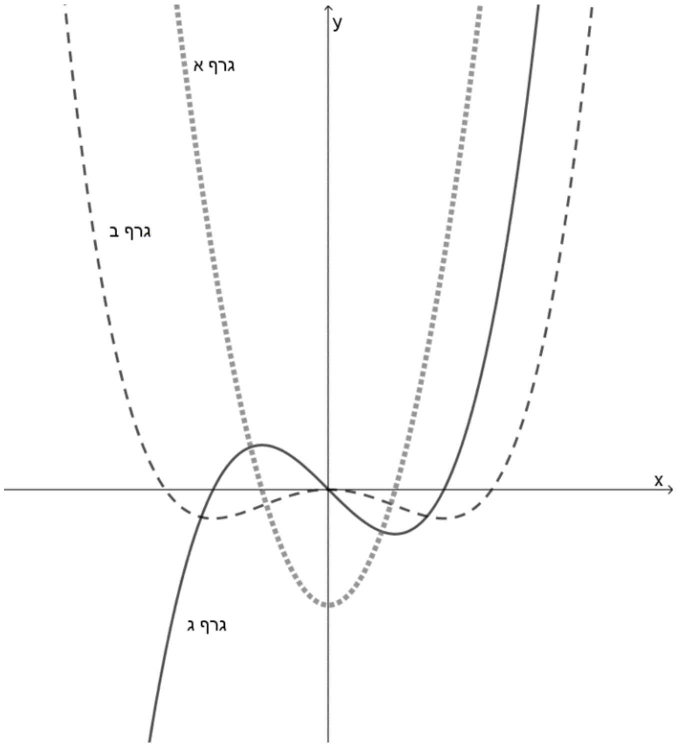
הטענה אינה נכונה.

סכום השטחים הינו גודל חיובי. האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מקבל ערך שלילי.

יש להדגיש. אינטגרל הוא מספר ממשי, המתאר שטח מצטבר "מכוון". כאשר הגרף מעל ציר ה- x הצבירה היא של גודל חיובי, כאשר הגרף מתחת לציר ה- x, הצבירה היא של גודל שלילי.

שאלה 28

לפניך סרטוט של שלושה גרפים,
המתאימים לפונקציה $f(x)$ ולשתי נגזרותיה: $f'(x)$ ו- $f''(x)$.
התאם בין הגרפים לפונקציות. נמק התאמתך.



גרף ב - $f(x)$
גרף ג - $f'(x)$
גרף א - $f''(x)$

גרף ב הינו הפונקציה $f(x)$, שלוש נקודות הקיצון שלה מתקבלות בנקודות האפס של גרף ג. שתי נקודות הקיצון של גרף ג מתקבלות בנקודות האפס של גרף א ובהן מתקבלות גם נקודות הפיתול של גרף ב.

שאלה 29

פונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור כל ערך של x.

נתון: $g(x) = f(x+1) + 8$, $g(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

חשב:

א. $f(1)$

ב. $f(0) + f(2)$

א. $g(x)$ היא פונקציה אי זוגית לכן

$g(0) = 0 \quad \leftarrow \quad f(0+1) + 8 = 0 \quad \leftarrow$

$f(1) + 8 = 0$ לכן $f(1) = -8$

ב. נשתמש בקשר בין $g(x)$ ל $f(x)$ ובעובדה ש- g פונקציה אי זוגית.

$$f(0) + 8 = g(-1) \quad \rightarrow \quad f(0) = g(-1) - 8$$

$$f(2) + 8 = g(1) \quad \rightarrow \quad f(2) = g(1) - 8$$

$$f(0) + f(2) = g(-1) - 8 + g(1) - 8 = g(-1) + g(1) - 16$$

הפונקציה $g(x)$ אי זוגית לכן

$$g(-1) = -\,g(1)$$

$$g(-1) + g(1) - 16 = -g(1) + g(1) - 16 = -16$$

שאלה 30

נתונות שלוש פונקציות $g(x)$, $k(x)$, $f(x)$ המוגדרות עבור כל ערך של x.
כל אחת מהפונקציות היא זוגית או אי זוגית. נתון:

$f^2(x) \cdot k(x) \cdot g^2(x)$ פונקציה זוגית,

$g^2(x) \cdot f(x) \cdot k(x)$ פונקציה אי זוגית,

$k^2(x) \cdot f(x) \cdot g(x)$ פונקציה אי זוגית.

איזו מהאפשרויות הבאות מתאימה לנתונים:

א. $f(x)$ אי זוגית, $k(x)$ אי זוגית, $g(x)$ זוגית.

ב. $f(x)$ אי זוגית, $k(x)$ זוגית, $g(x)$ זוגית.

ג. $f(x)$ זוגית, $k(x)$ זוגית, $g(x)$ אי זוגית.

נבחן כל נתון: $f^2(x) \cdot k(x) \cdot g^2(x)$ פונקציה זוגית.
$f^2(x)$ ו - $g^2(x)$ חיוביות לכל x לכן אינן משפיעות על הזוגיות/אי זוגיות.
כיוון שהמכפלה זוגית נובע ש - $k(x)$ **זוגית**.
$g^2(x) \cdot f(x) \cdot k(x)$ פונקציה אי זוגית.
$g^2(x)$ אינה משפיעה, $k(x)$ זוגית. כדי שהמכפלה תהייה אי זוגית, $f(x)$ **אי זוגית**.
$k^2(x) \cdot f(x) \cdot g(x)$ פונקציה אי זוגית.
$f(x)$ אי זוגית , כדי שהמכפלה תהייה אי זוגית $g(x)$ **תהיה זוגית**.
מסקנה: $k(x)$ **זוגית**, $f(x)$ **אי זוגית**, $g(x)$ **זוגית** והאפשרות המתאימה היא ב.
ניתן בהמשך לשאלה להציג את אוסף התכונות של סכום ומכפלת פונקציות זוגיות ואי זוגיות.
הוכיחו את הטענות הבאות:

- הסכום של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- המכפלה של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- המכפלה של שתי פונקציות אי זוגיות היא פונקציה זוגית.
- המכפלה של פונקציה אי זוגיות ופונקציה זוגית היא פונקציה אי זוגית.

כדאי לפנות ל"ארגז הכלים" באתרנו, בו קיימות שתי פעילויות בנושא פונקציות זוגיות ואי זוגיות.

ניתן להציג בעיה דומה מורכבת יותר לתלמידים מתקדמים.

יש כאן שתי אפשרויות מתאימות והתהליך מורכב יותר.

<u>שאלה מורכבת יותר</u>

נתונות שלוש פונקציות $f(x),\ k(x),\ g(x)$ המוגדרות עבור כל ערך של x.

כל אחת מהפונקציות היא זוגית או אי זוגית.

נתון:

$f^2(x)\cdot k(x)\cdot g(x)$ פונקציה זוגית,

$f(x)\cdot k^2(x)\cdot g(x)$ פונקציה אי זוגית,

$f(x)\cdot k(x)\cdot g^2(x)$ פונקציה אי זוגית.

אילו מהאפשרויות הבאות יכולות להתאים לנתונים: (יש יותר מאפשרות אחת)

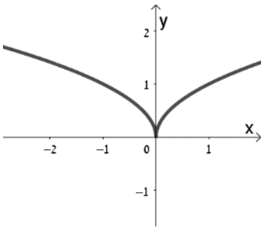
א. $f(x)$ אי זוגית, $k(x)$ אי זוגית, $g(x)$ זוגית.

ב. $f(x)$ אי זוגית, $k(x)$ זוגית, $g(x)$ זוגית.

ג. $f(x)$ זוגית, $k(x)$ זוגית, $g(x)$ אי זוגית.

ד. $f(x)$ זוגית, $k(x)$ אי זוגית, $g(x)$ אי זוגית.

שאלה 31



התבונן בגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{|x|}$.

1. האם הנגזרת הראשונה מוגדרת כאשר $x=0$?

הנגזרת לא קיימת בנקודה $x=0$.
הגבול של הנגזרות בסביבת אפס מימין שונה מהגבול של הנגזרות בסביבת אפס משמאל.

2. האם יש לפונקציה נקודת קיצון כאשר $x=0$?

אם כן, קבע את סוג הקיצון, אם לא, הסבר מדוע.

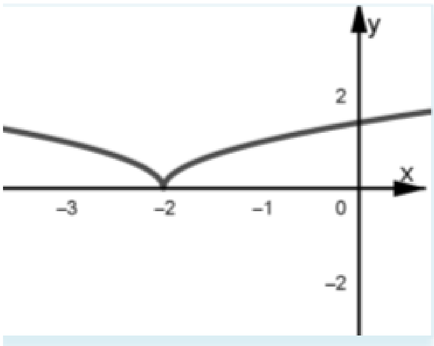
לפונקציה נקודת מינימום ב- $x=0$. נקודת קיצון תיתכן גם בנקודות בהן הנגזרת הראשונה אינה קיימת. (למשל נקודת קיצון בפונקצית הערך המוחלט)

3. האם יש לפונקציה נקודת פיתול כאשר $x=0$?

אין נקודת פיתול. נקודת פיתול קיימת אם יש בנקודה **שינוי** של קעירות למעלה/למטה. הפונקציה $f(x)$ קעורה מטה לכל $x\neq 0$

4. סרטט את גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt{|x+2|}$

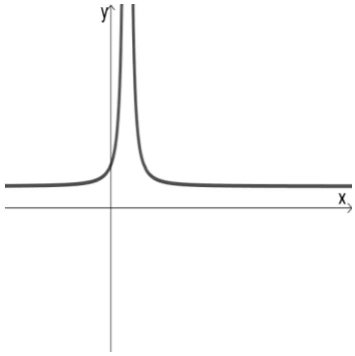
זוהי הזזה של הגרף הנתון בסעיפים הקודמים, שתי יחידות שמאלה.



שאלה 32

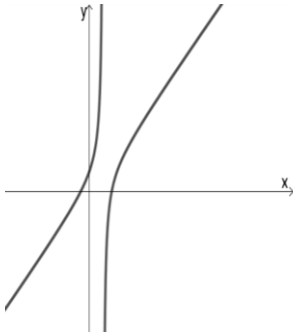
לפניך מוצגים שלושה גרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''^{(x)}$

זהה איזה גרף מתאים לכל פונקציה. נמק.



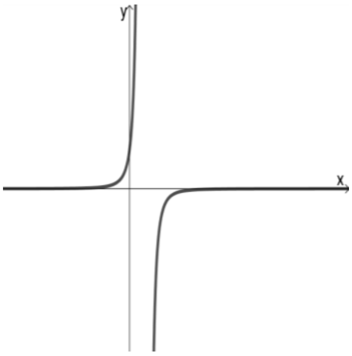
גרף א

$f'(x)$



גרף ב

$f(x)$



גרף ג

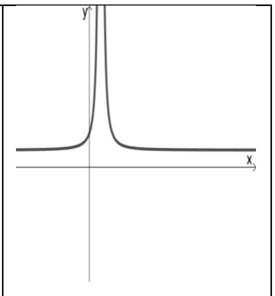
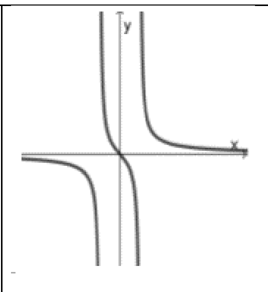
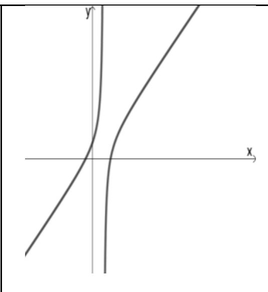
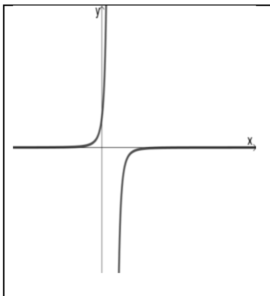
$f''(x)$

1. לגרף ב שתי נקודות חיתוך עם הצירים. אם הגרף היה מתאים לאחת הנגזרות הרי שהיו לאחת הפונקציות נקודות קיצון.
אין זה כך, לכן גרף ב מתאים ל - $f(x)$.
2. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה, לכן הנגזרת הראשונה חיובית. מכאן גרף ג מתאים ל – $f'(x)$.
3. הנגזרת הראשונה עולה משמאל לנקודת אי ההגדרה ויורדת מימין לה. לכן הנגזרת השנייה חיובית משמאל לנקודת אי ההגדרה ושלילית מימין לה. מכאן גרף ג מתאים ל- $f''(x)$.

שאלה מורכבת יותר:

לפניך **ארבעה** גרפים שלושה מהם מתאימים לפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$, $f''^{(x)}$

זהה איזה גרף מתאים לכל פונקציה. נמק.

			
גרף א	גרף ב	גרף ג	גרף ד

שאלה 33

א. חשב את ערך האינטגרל $\int_0^{2\pi}(sin^2x + cos^2x)\,dx$

$$\int_0^{2\pi}(sin^2x + cos^2x)\,dx = \int_0^{2\pi} 1dx = x|_0^{2\pi} = 2\pi$$

ב. נמק מדוע מתקיים השוויון: $\int_0^{2\pi} cos^2 xdx = \int_0^{2\pi} sin^2x\,dx$.
וקבע את הערך של כל אחד מהאינטגרלים. היעזר בתכונות הפונקציות הטריגונומטריות ובסעיף א.

ניתן להוכיח באופן ישיר על ידי חישוב.

אולם:

אם נזכור כי הגרף של פונקציית הקוסינוס הוא הזזה שמאלה של הגרף של פונקציית הסינוס, הרי שקשר זה נשמר גם בין ריבועי הפונקציות.

אורך המחזור של פונקציית הסינוס זהה לאורך המחזור של פונקציית הקוסינוס ושווה ל- 2π. אורך המחזור של ריבועי הפונקציות הוא π, אך אין הכרח לטעון זאת.

קטע האינטגרציה מכיל מספר שלם של מחזורים ולכן השטחים המצטברים – גודל האניטגרל בכל אחת מהפונקציות זהה.

על פי סעיף א סכום האינטגרלים הוא 2π ולכן ערכן של כל אחד מהאינטגרלים הוא π.

בחישוב ישיר:

נוכיח $\int_0^{2\pi}(cos^2 x - sin^2x)dx = 0$

מכך ינבע השוויון בין האינטגרלים.

$$\int_0^{2\pi}(cos^2 x - sin^2x)dx = \int_0^{2\pi} cos2xdx = \frac{sin2x}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$$

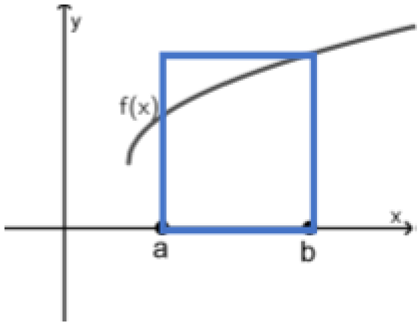
מספיק לחשב את אחד האינטגרלים, אך ניתן להראות גם חישוב של שניהם:

$$\int_0^{2\pi} cos^2 xdx = \int_0^{2\pi}\frac{cos2x+1}{2}dx = \frac{sin2x}{4} + \frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0 + \pi - (0) = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} sin^2x\,dx = \int_0^{2\pi}(1 - cos^2x)dx = x - \left(\frac{sin2x}{4} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 - \pi - (0) = \pi$$

שאלה 34

נתון גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $[a,b]$. הפונקציה עולה וקעורה כלפי מטה.



א. איזה מהביטויים הבאים מייצא את שטח המלבן המתואר בציור:

1. $f(a)(b-a)$
2. $f(b)(b-a)$
3. $\frac{1}{2}(a+b)(b-a)$

ב. אילו מהטענות הבאות נכונות? נמק. תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה.

$$\int_a^b f(x)\,dx < f(b)(b-a)$$

נכון: השטח מתחת לפונקציה קטן משטח המלבן המסורטט.

1. $\int_a^b f(x)\,dx > f(a)(b-a)$

נכון: השטח מתחת לפונקציה גדול משטח המלבן שגובהו $f(a)$.

2. $\int_a^b f(x)dx < \frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)$

לא נכון: השטח $\frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)$ הוא שטח המלבן שגובהו הממוצע החשבוני בין $f(b)$ ל $f(a)$.

כיוון שהפונקציה קעורה כלפי מטה $\int_a^b f(x)dx > \frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)$

שאלה 35

קבע האם נכונה או לא נכונה הטענה הבאה. אם הטענה נכונה – הוכח אותה, אם לא – הצג דוגמה נגדית.

הטענה: "פונקציית הנגזרת של כל פונקציה זוגית היא אי-זוגית".

הטענה נכונה:

הוכחה: $f(x)$ פונקציה זוגית ← $f(x)=f(-x)$

גזירת שני האגפים: $f'(x)=-f'(-x)$ לכן הפונקציה הנגזרת היא אי זוגית

שאלה 36

נתונות שלוש פונקציות **שונות** שאינן קבועות.
נתון $f(x)$ פונקציה זוגית, $g(x)$ פונקציה אי-זוגית, $k(x)$ פונקציה אי-זוגית.
קבע ונמק לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא זוגית, אי זוגית או לא זוגית ולא אי זוגית.

בשאלה נבדקת הבנת ההשפעה של פעולות על פונקציות זוגיות ופונקציות אי-זוגיות.
בסעיף ג נבדקת ההבנה שמתיחה של פונקציה לא משפיעה על הזוגיות/אי זוגיות שלה.

א. $k(x)\cdot g(-x)\cdot f^2(x)$ פונקציה זוגית.

$f^2(x)$ חיובית. $g(x)$ אי זוגית לכן גם $g(-x)$ אי זוגית. $k(x)$ אי זוגית.
מכפלה של פונקציה אי זוגית באי זוגית היא פונקציה זוגית (הצדיקו!).

ב. $f(x)\cdot[k(x)-g(x)]$ פונקציה אי זוגית.

הפרש פונקציות אי זוגיות, שאינן שוות, הוא פונקציה אי זוגית. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי זוגית היא פונקציה אי זוגית.

ג. $k(2x)$ פונקציה אי זוגית.

$k(x)$ פונקציה אי-זוגית. נחליף את המשתנה $2x$ ב - t

$k(x)=-k(-x)$ ← $k(t)=-k(-t)$ ← $k(2x)=-k(-2x)$

שאלה 37

מצא את שיעורי הנקודה בה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ יש משיק בעל שיפוע מקסימלי.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

נחפש את הנקודה בה לשיפוע המשיק ערך מקסימלי, כלומר לנגזרת הראשונה ערך מקסימלי.

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2+4x(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-2\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} < 0$$

$$f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} > 0 \quad \rightarrow \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$$

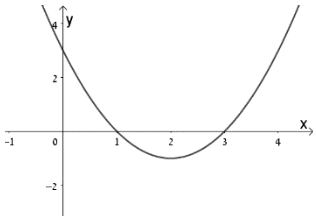
הנקודה על הפונקציה בה שיפוע המשיק הוא מקסימלי היא $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$.

שאלה 38

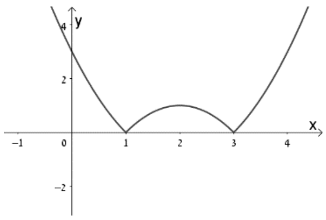
א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 1$

הסרטוט יתבצע בשלושה שלבים:

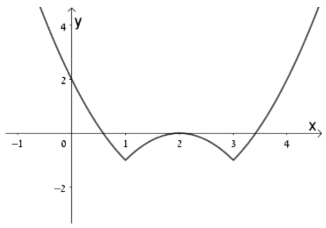
1. סרטוט הפרבולה $y = x^2 - 4x + 3$



2. הפעלת פעולת ערך מוחלט על הפרבולה.



3. הזזת הגרף ביחידה אחת למטה.



ב. פתרו את המשוואה $|x^2 - 4x + 3| = 3$

מתוך התבוננות בגרף הפונקציה $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 1$ נתייחס למשוואה הנתונה $|x^2 - 4x + 3| = 3$ באופן הבא: $|x^2 - 4x + 3| - 1 = 2$ פתרון המשוואה הוא נקודות חיתוך הפונקציה עם הישר $y = 2$. מכאן הפתרונות $(4,2)$, $(0,2)$.

ג. פתרו את המשוואה $|x^2 - 4x + 3| = -2$

אין פתרונות למשוואה:

1. נימוק אלגברי – הביטוי $|x^2 - 4x + 3|$ אינו שלילי ולכן אינו שווה -2.
2. נימוק גרפי: נתייחס למשוואה הנתונה באופן הבא: $|x^2 - 4x + 3| - 1 = -3$.
   פתרון המשוואה הוא נקודות חיתוך הפונקציה עם הישר $y = -3$. הפונקציה אינה חותכת את הישר $y = -3$. ולכן אין פתרונות למשוואה.

שאלה 39

א. מצא פונקציה (ייצוג אלגברי) שיש לה שתי נקודות אי הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת ושתי אסימפטוטות אנכיות.

דוגמה: $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$

ניתן כתרגיל נוסף להגדיר את האסימפטוטות. למשל:
מצאו פונקציה (ייצוג אלגברי) שיש לה שתי נקודות אי הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת $y=2$ ושתי אסימפטוטות אנכיות.

ותשובה אפשרית היא $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$.

ב. מצא פונקציה (ביטוי אלגברי) שיש לה שתי נקודות אי הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת.

כדי לקבל נקודת אי הגדרה ללא אסימפטוטה לפונקציה תהיה נקודת אי-רציפות סליקה- "חור". דוגמה $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)}$. הגורם $x+1$ מופיע גם במונה וגם במכנה.

שאלה 40

$f(x)$ היא פונקציה רציונלית כך ש- $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, ענה נכון/לא נכון ונמקו את הטענות שאינן נכונות.

1. **נקודות האפס של $f(x)$ מתקבלות בהכרח בכל נקודה בה $\mathbf{P}(x)=0$.**

   לא נכון.

   הנקודה יכולה להיות גם נקודות אי הגדרה אם מתקיים גם: $Q(x)=0$.

2. **נקודות האפס של $f(x)$ מתקבלות בהכרח בכל נקודה $\mathbf{Q}(x)=0$.**

   לא נכון.

   בנקודות אלו קיימת אי הגדרה של $f(x)$.

3. **בנקודות בהן $\mathbf{Q}(x)=0$ בהכרח עוברות אסימפטוטות מקבילות לציר y.**

   לא נכון.

   בנקודות בהן $P(x)=0$ יכולות להיות נקודות אי הגדרה בהן יש אי-רציפות סליקה – "חור". לדוגמה: $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}$

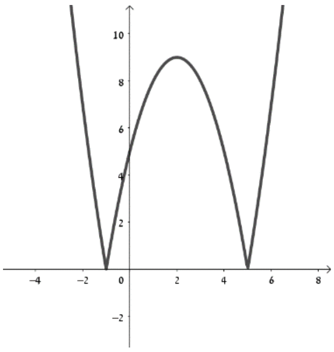
שאלה 41

נתונה המשוואה $|x^2-4x-5|=k$ עבור אילו ערכים של הפרמטר k

א. יש למשוואה פתרון יחיד?

ב. אין למשוואה פתרון?

ג. יש למשוואה פתרון השווה ל- 0?



מהתבוננות בסרטוט הפונקציה $f(x)=|x^2-4x-5|$

ובישרים המקבילים לציר ה- x: $y=k$, לכל $k\in R$ נסיק:

א. אין k עבורו יש למשוואה פתרון יחיד

ב. לכל $k<0$ אין פתרון למשוואה.

ג. עבור $k=5$ יש למשוואה פתרון השווה ל – 0.

ניתן בכיתה להוסיף שאלות נוספות: עבור אילו ערכים של הפרמטר k יש למשוואה שני פתרונות או שלושה פתרונות.

שאלה 42

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-1}$

מצא את האסימפטוטות האופקיות והאנכיות שלה, אם ישנן כאלה.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}}{x(1-\frac{1}{x})}$$

הביטויים המייצגים שברים: $\frac{2}{x^2}$, $\frac{1}{x}$, שואפים לאפס כאשר ערכו המוחלט של המכנה גדל מאד,

מכאן קל לראות, שעבור מספרים חיוביים שואפים לאינסוף המונה והמכנה חיוביים ומנתם שואפת ל- $(+1)$,

עבור מספרים שליליים שואפים למינוס אינסוף המונה חיובי והמכנה שלילי ומנתם שואפת ל- (-1). כלומר:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}}{x(1-\frac{1}{x})}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}}{x(1-\frac{1}{x})}=(-1)$$

מכאן:

הישר: $y=1$ אסימפטוטה לפונקציה המקבילה לציר ה- x בקרן הימנית/חיובית של הציר, והישר: $y=-1$ אסימפטוטה לפונקציה המקבילה לציר ה- x בקרן השמאלית/שלילית שלו.

לפונקציה יש <u>לכאורה</u> נקודת אי הגדרה שמאפסת מכנה וצפויה בה אסימפטוטה אנכית לציר x.

אך זו אינה בתחום ההגדרה של הפונקציה:

המכנה: $x-1$ מתאפס ב $x=1$

אך הפונקציה מוגדרת בתחום $x\geq 2$ או $x\leq(-1)$.

לכן אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית.

שאלה 43

מצא פונקציה (ביטוי אלגברי) בעלת שתי אסימפטוטות אנכיות ושתי אסימפטוטות אופקיות שונות זו מזו.

דוגמה:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

אסימפטוטות אנכיות: $x=-2 \quad ; \quad x=2$ (רק המכנה מתאפס בנקודות אלה)

אסימפטוטות אופקיות: $y=-1 \quad ; \quad y=1$ (ראו הסבר בשאלה 46)

טריגונומטריה/גיאומטריה

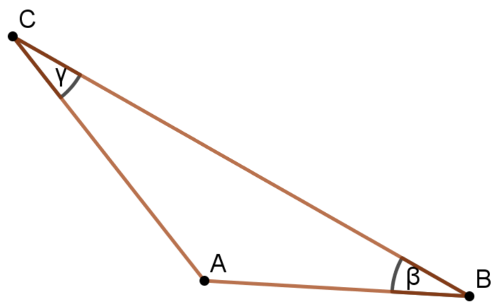
שאלה 1

במשולש ABC נתון $\beta = 20°$

$AB = 3, AC = 5$

חשב את זווית γ ($\measuredangle ACB$).

דן הגיש את הפתרון הבא.



בדוק פתרונו של דן לשאלה הבאה.

אם יש טעות בפתרון, הסבר מהי.

$$\frac{5}{\sin 20°} = \frac{3}{\sin\gamma}$$

$$sin\gamma = \frac{3sin20°}{5} = \frac{1.026}{5} = 0.2052$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_1 = 11.84° \quad ,\gamma_2 = 180 - 11.84 = 168.16°$$

הטעות של דן: הזווית γ_2 אינה פתרון לבעיה.

ניתן לראות שסכום הזוויות $\gamma_2 + \beta > 180°$

כיוון ש- $AC > AB$ הרי ש - $\gamma < 20°$ לכן γ תהייה זווית חדה בלבד.

אם הזווית הנתונה היא מול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות אז יהיה פתרון יחיד לזווית γ. אם הזווית הנתונה היא מול הצלע הקטנה מבין השתיים יהיו שתי תוצאות לזווית, אחת קהה ואחת חדה.

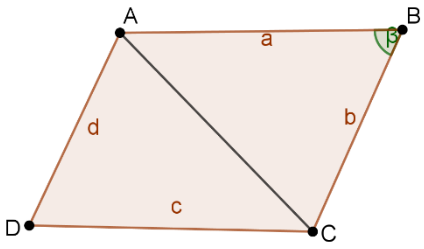
שאלה 2

הראה כי סכום ריבועי האלכסונים במקבילית שווה לסכום ריבועי צלעותיה.

באמצעות משפט הקוסינוסים: בשאלה ההנחיה היא "הראה" ולא "הוכח"

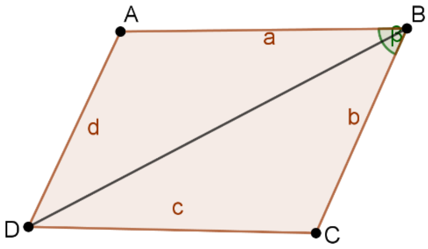
במשולש ABC

$$(AC)^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\beta$$



במשולש ABD

$$(BD)^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(180° - \beta) = a^2 + b^2 + 2abcos\beta$$



$$\Downarrow$$

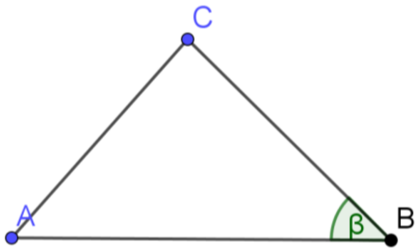
$$(AC)^2 + (BD)^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\beta + a^2 + b^2 + 2abcos\beta = a^2 + b^2$$

הערה:

ניתן כמובן להוכיח את המשפט באמצעות גיאומטריה אוקלידית.

שאלה 3

בדוק פתרונה של דנה לשאלה הבאה. אם יש טעות בפתרון, הסבר מהי.



במשולש ABC נתון $AC = 3$, $AB = 5$ $\beta = 30°$,

חשב את זווית γ ($\measuredangle$ACB).

דנה הגישה את הפתרון הבא:

$$\frac{3}{\sin 30°} = \frac{5}{\sin\gamma}$$

$$sin\gamma = \frac{5sin30°}{3} = \frac{2.5}{3} = 0.833 \quad \rightarrow \quad \gamma = 56.44$$

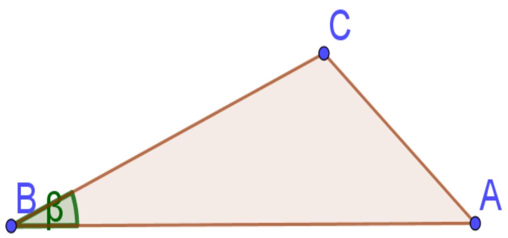
הטעות של דנה: חסרה האפשרות של γ כזווית קהה. $sin\gamma = 0.833$

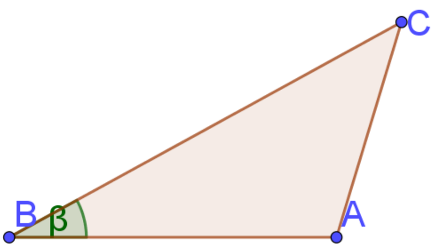
$$\downarrow$$

$$\gamma_1 = (\measuredangle ACB)_1 = 56.44° \quad ;$$

$$\gamma_2 = (\measuredangle ACB)_2 = 180° - 56.44° = 123.56°$$

קיימים שני משולשים המקיימים את הנתונים.





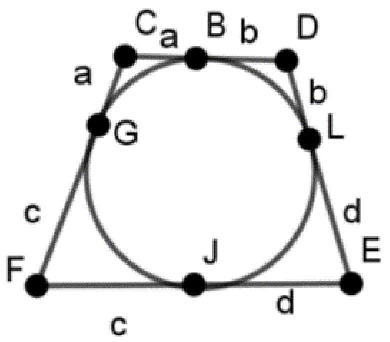
שאלה 4

קבע אם הטענות הבאות נכונות או לא. נמק קביעתך.

-בטרפז החוסם מעגל סכום הבסיסים שווה לסכום השוקיים.

הטענה נכונה:
הוכחה:

מרובע חוסם מעגל אם ורק אם
סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות
הנגדיות האחרות:



$$CD + FE = CF + DE$$

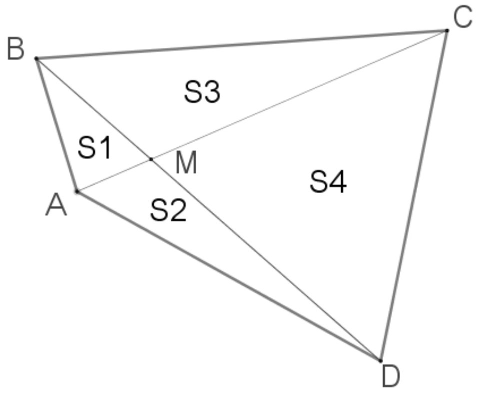
מנקודות F,E,D,C יוצאים משיקים למעגל
לכן

$$\mathrm{CB} = CG = a$$
$$\mathrm{GF} = \mathrm{FJ} = \mathrm{c}$$
$$\mathrm{JE} = \mathrm{EL} = d$$
$$\mathrm{LD} = \mathrm{DB} = b$$
$$\Downarrow$$
$$CD + FE = CF + DE = a + b + c + d$$

-כל טרפז ניתן לחסימה במעגל.

הטענה אינה נכונה: מרובע חסום במעגל אם ורק אם סכום כל שתי זוויות נגדיות שלו שווה $180°$. לכן **רק** טרפז שווה שוקיים ניתן לחסימה במעגל.
ניתן להציע לנסות לחסום טרפז ישר זווית במעגל ולהראות שיש שני אורכים אפשריים לקטרים של המעגל: האורכים של שני האלכסונים השונים זה מזה.

שאלה 5



אלכסוני המרובע $ABCD$ מחלקים אותו לארבעה משולשים ששטחיהם: S_1 ,S_2, S_3, S_4.

השטחים S_1 ,S_2, S_3 מהווים סדרה הנדסית.

הוכח כי: $\left(\frac{DM}{BM}\right)^2 = \left(\frac{CM}{AM}\right)$

הוכחה: נסמן ב- q את מנת הסדרה ההנדסית.

$$\sphericalangle BMA = \alpha$$

$$\sphericalangle BMD = 180° - \alpha$$

$$\sphericalangle BMC = 180° - \alpha$$

נחשב את שלושת השטחים :

$$S_1 = \frac{1}{2} BM \cdot MA \cdot sin\alpha$$

$$S_2 = \frac{1}{2} AM \cdot MD \cdot sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} AM \cdot MD \cdot sin\alpha$$

$$S_3 = \frac{1}{2} BM \cdot MC \cdot sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} BM \cdot MC \cdot sin\alpha$$

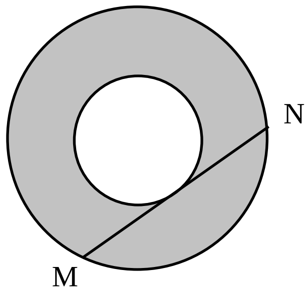
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{MD}{MB} = q$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{MC}{MA} = q^2$$

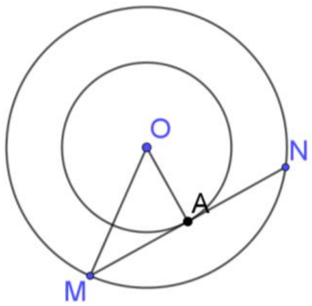
לכן:

$$(\frac{MD}{MB})^2 = \frac{MC}{MA}$$

שאלה 6



נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף.
המיתר MN משיק למעגל הפנימי,
שטח הטבעת שווה ל- 36π.
חשב את אורך המיתר MN.



נסמן ב- r את רדיוס המעגל הפנימי המאונך למיתר MN המשיק למעגל הפנימי.

נסמן ב- R את רדיוס המעגל החיצוני.

שטח הטבעת הנתון: 36π, כלומר:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = 36\pi \rightarrow \quad R^2 - r^2 = 36$$

$r = OA$

$R = OM$

משפט פיתגורס במשולש ישר זווית OAM:

$R^2 = r^2 + MA^2$

$R^2 - r^2 = MA^2 = 36 \quad \rightarrow \ MA = 6$

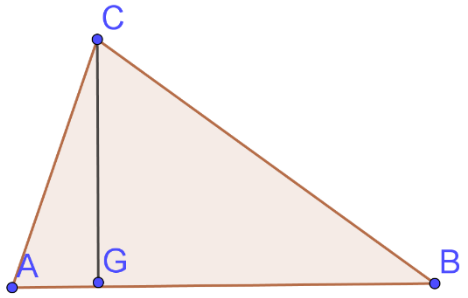
AO מאונך למיתר וחוצה אותו, לכן $MN = 12$.

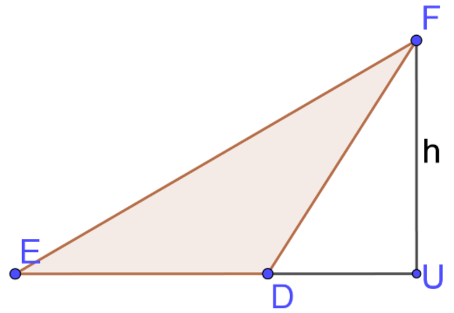
שאלה 7

נתונים משולשים ΔABC ו $\Delta EDF-$.

$AB = ED, \quad AC = EF$.

שני המשולשים הם שווי שטח. האם משולשים אלה בהכרח חופפים? נמק.





הסבר באמצעות בנייה:

נתונים שני משולשים

$AB = ED$

$AC = EF$

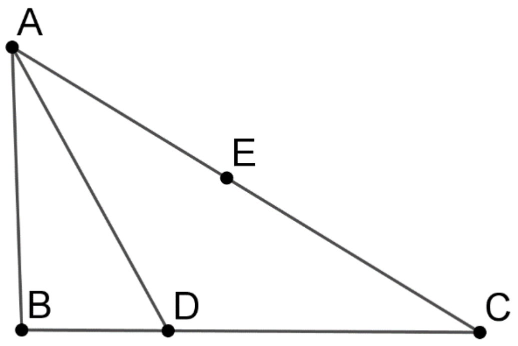
במשולש ΔEDF נבנה את הזווית $\measuredangle EDF$ כך שגובה המשולש h יהיה זהה לגובה המשולש ΔABC. שני המשולשים הינם בעלי אותה צלע ואותו גובה היורד אליה, ולכן בעלי שטח זהה אך כמובן שאינם חופפים. האחד קהה זווית והשני בעל זוויות חדות.

ניתן לייצר אינסוף משולשים בעל צלע באורך AB וגובה באורך h, אם נבנה מקביל לצלע AB דרך הקדקוד C. כל משולש שצלעו AB והקדקוד השלישי שלו יהיה על המקביל שהעברנו יהיה בעל שטח זהה לשטח של המשולש ABC.

הסבר טריגונומטרי:

$S = \frac{1}{2}absin\gamma = \frac{1}{2}absin(180 - \gamma)$ קיימים שני משולשים שווי שטח בעלי שתי צלעות שוות והזווית ביניהם משלימה ל - $180°$ ולכן אינם חופפים.

שאלה 8

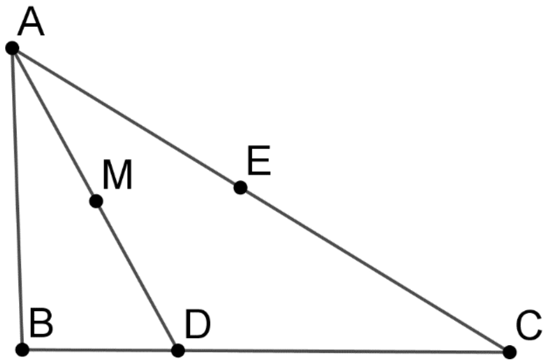


משולש ABC הוא ישר זווית ($\measuredangle B = 90°$).
הנקודה E היא אמצע הצלע AC.
הנקודה D *נמצאת* על הצלע BC
כך ש - $AD = DC$.

הוכח שהמרובע $ABDE$ הוא בר חסימה במעגל.

הוכחה: ΔADC שווה שוקיים.
DE תיכון לצלע AC ולכן גם גובה לצלע.
$\measuredangle E = \measuredangle B = 90°$,
במרובע $ABDE$ שתי זוויות נגדיות שסכומן $180°$ ולכן הוא בר חסימה במעגל.

שאלה 9



משולש ABC הוא ישר זווית $(\measuredangle B = 90°)$

הנקודה E היא אמצע הצלע AC. הנקודה D

נמצאת על הצלע BC כך ש- $AD = DC$

נתון: הנקודה M היא אמצע הקטע AD.

הוכח: $ME = MB$.

הוכחה:

ME קטע אמצעים במשולש ADC. (E אמצע צלע AC ו – M אמצע צלע AD)

מכאן $ME = \frac{1}{2}DC$ $\leftarrow$ $ME = \frac{1}{2}AD$ $AD = DC$

$MB = \frac{1}{2}AD$ (התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר)

מכאן $ME = MB$

סדרות

שאלה 1

נתונה סדרה שסכום n האיברים הראשונים בה הוא $2n^3-1$ לכל n טבעי.
מצא את הערכים של a_1, a_4, a_{100}.

$$a_1 = S_1 = 1$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = 2\cdot 64 - 1 - (2\cdot 8 - 1) = 112$$

$$a_{100} = S_{100} - S_{99} = 59402$$

את a_4 ניתן לחשב גם על ידי חישוב שלושת האיברים הקודמים לו.

שאלה 2

נתונה סדרה חשבונית שאינה קבועה.
הוכח כי כל שלושה איברים עוקבים בסדרה החשבונית אינם יכולים להיות בבת אחת שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

יהיו $a-d, a, a+d$ שלושה איברים עוקבים בסדרה החשבונית. נבדוק אם הם יכולים להיות שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית כלומר,

האם $\frac{a+d}{a} = \frac{a}{a-d}$?

$$\frac{a}{a-d} = \frac{a+d}{a}$$

$$a^2 = a^2 - d^2 \quad \rightarrow \quad d = 0$$

$d = 0$, כלומר הסדרה קבועה מה שנוגד את הנתון שאיברי הסדרה שונים.

שאלה 3

נתונה $a_{1,}a_2, a_3, a_4, a_5 \dots a_n \dots \dots$, סדרה חשבונית שהפרשה d

בטא באמצעות n ו- d את הסכום

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{2n} - a_{2n-1})$$

כל הפרש של שני איברים סמוכים: $a_i - a_{i-1}$, $2 < i < 2n$

שווה להפרש הסדרה d

מספר ההפרשים הוא $2n - 1$,

לכן ערכו של הסכום הוא $(2n - 1)d$.

שאלה 4

נתונה a_n סדרה הנדסית. האם הסדרה $\frac{1}{(a_n)^2}$ סדרה הנדסית?
נמק.

נסמן ב- q את מנת הסדרה.

נבדוק את המנה של שני איברים סמוכים בסדרה החדשה:

$$\frac{\frac{1}{(a_{n+1})^2}}{\frac{1}{(a_n)^2}} = \frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2} = (\frac{a_1 q^{n-1}}{a_1 q^n})^2 = \frac{1}{q^2}$$

המנה קבועה ולכן הסדרה הנדסית.

שאלה 5

הוכיח את השוויון $\frac{1}{3} = ... - \cos x - \cos^2 x + \cos^3 x$ עבור $x = \frac{\pi}{3}$.

הסכום הינו סכום סדרה הנדסית אינסופית בה המנה היא: $q = -cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

$$S = \frac{cos\frac{\pi}{3}}{1 + cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

שאלה 6

הוכח כי בסדרה חשבונית ... a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$ לכל $n > k > 0$, טבעיים

הוכחה:

$$a_{n+k} = a_1 + (n + k - 1)d$$

$$a_{n-k} = a_1 + (n - k - 1)d$$

$$\frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2} = \frac{2a_1 + (n + k - 1 + n - k - 1)d}{2} =$$

$$= \frac{2a_1 + 2(n - 1)d}{2} = a_1 + (n - 1)d = a_n$$

שאלה 7

נתונה $a_{1,}a_2, a_3, a_4, a_5 \dots a_{\mathrm{i}\dots}$ סדרה חשבונית שהפרשה d.

נגדיר סדרה נוספת $b_n = a_{n+1} - a_n$.

בטא באמצעות d ו- n את הסכום $b_1 + b_2 + b_3 \dots \dots . +b_n$

בסדרה חשבונית הפרש כל שני איברים עוקבים הוא d. לכן:

$b_k = a_{k+1} - a_k = \mathrm{d}$ לכל k טבעי $\rightarrow$ $b_1 + b_2 + b_3 \dots \dots . +b_n = nd$

שאלה 8

נתונה סדרה הנדסית אינסופית, שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

מגדירים סדרה חדשה בה מתקיים: $b_n = \frac{a_{n+2}}{a_n \cdot a_{n+3}}$ לכל n טבעי.

א. הוכח כי גם הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית.

$$b_n = \frac{a_{n+2}}{a_n \cdot a_{n+3}} = \frac{a_n . q^2}{a_n \cdot a_n \cdot q^3} = \frac{1}{a_n \cdot q}$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1 q} \rightarrow b_n = \frac{1}{a_1 q^n} = b_n \left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}$$

מכאן b_n סדרה הנדסית בעלת מנה $\frac{1}{q}$.

ניתן גם להוכיח שהסדרה הנדסית בעלת מנה $\frac{1}{q}$ ע"י בדיקת היחס:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$$

ב. האם ייתכן כי סכום אינסוף איברי הסדרה הראשונה וגם סכום אינסוף איברי הסדרה השנייה הוא מספר סופי? הסבר תשובתך.

לא ייתכן. בכל סדרה הנדסית אינסופית בה $|q| < 1$ סכום אינסוף איברי הסדרה הוא מספר סופי. כיוון שמנות הסדרות הן שני איברים הופכיים הרי שלאחת יש מנה המקיימת $|q| \le 1$ ולשנייה $q \le -1$ או $q \ge 1$ ולכן:

אם $|q| \ne 1$, אזי סכום האחת סופי וסכום השנייה אינסופי.

אם $|q| = 1$ אזי הסכומים של שתי הסדרות אינסופיים.

שאלה 9

נתונות סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, ...$, בעלת הפרש d,

וסדרה הנדסית: $b_1, b_2, b_3, ...$, בעלת מנה: q.

בטא באמצעות d , ו- q את ערך הסכום הבא:

$$\frac{b_1(a_1 - a_3)}{b_3} + \frac{b_2(a_2 - a_4)}{b_4} + \frac{b_3(a_3 - a_5)}{b_5} + \cdots + \frac{b_{100}(a_{100} - a_{102})}{b_{102}}$$

$$\frac{b_k}{b_{k+2}} = \frac{1}{q^2} \quad ; \quad a_k - a_{k+3} = -2d$$

$$\frac{b_1(a_1 - a_3)}{b_3} + \frac{b_2(a_2 - a_4)}{b_4} + \frac{b_3(a_3 - a_5)}{b_5} + \cdots + \frac{b_{100}(a_{100} - a_{102})}{b_{102}} =$$

$$\frac{-2d}{q^2} + \frac{-2d}{q^2} + \frac{-2d}{q^2} + \cdots + \frac{-2d}{q^2} = -100\frac{2d}{q^2}$$

שאלה 10

בסדרה חשבונית עולה $2n-1$ איברים וידוע כי $a_{n+1=0}$
נסמן:
A סכום n האיברים הראשונים בסדרה ו- B סכום n האיברים האחרונים בסדרה.
מצא את היחס: $\frac{|B|}{|A|}$

בסדרה האיבר האמצעי שווה 0. סכום כל שני איברים סימטריים גם הוא 0.

$$a_1 + a_{2n+1} = 0\ ,\quad a_2 + a_{2n} = 0\ ,\quad a_k + a_{2n+1-(k-1)} = 0.........$$

$$\rightarrow\quad a_1 + a_2 \ldots\ldots a_n = -(a_{n+2+}a_{n+3} \ldots\ldots + a_{2n+1}) \rightarrow$$

$A = -B$

לכן $|A| = |B|$ ומכאן $\frac{|B|}{|A|} = 1$

שאלה 11

נתונה סדרה חשבונית ובה $2n+1$ איברים. הפרש הסדרה הוא d.

א. הוכח כי בסדרה האיברים הראשון, האמצעי והאחרון של סדרה זו מהווים סדרה חשבונית.

האיברים הראשון, האמצעי והאחרון הם a_1, a_{n+1}, a_{2n+1}

נבדוק האם $a_1 + a_{2n+1} = 2 \cdot a_{n+1}$

$$a_1 + a_1 + 2nd \stackrel{?}{=} 2 \cdot (a_1 + nd)$$

$$2a_1 + 2nd = 2a_1 + 2nd$$

ב. הבע את הפרש הסדרה של שלושת האיברים מסעיף קודם באמצעות n ו- d.

$$D = a_{n+1} - a_1 = a_1 + nd - a_1 = nd$$

שאלה 12

נתונה סדרה הנדסית שאיברה הכללי $a_n = sin^n x$ $\pi < x < 2\pi$

א. עבור איזה ערך של x הסדרה אינה מתכנסת?

מנת הסדרה היא $sinx$. סדרה הנדסית אינה מתכנסת עבור $sinx = \pm 1$.

בתחום הנתון $\pi < x < 2\pi$, $sinx = -1$ כלומר $x = 1.5\pi$.

ב. נתון כי סכום הסדרה הוא $-\frac{1}{3}$. חשב את ערכו של x.

$a_1 = sinx$, מנת הסדרה היא $sinx$ $\frac{sinx}{1-\text{sinx}} = -\frac{1}{3}$

$$sinx = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{7\pi}{6} \ , \ x_2 = \frac{11\pi}{6}$$

שאלה 13

סכום אברי הסדרה שאיברה הכללי $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2} - x)$ הוא $sinx + cosx$.

בחר את התשובה הנכונה ונמק.

מספר האיברים בסדרה הוא: א. 36 ב. 40 ג. 42 ד. 44

בסדרה קיימת מחזוריות. סכום כל ארבעה איברים עוקבים הוא אפס.

$$a_1 = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = cosx$$

$$a_2 = \sin(\pi - x) = sinx$$

$$a_3 = \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -cosx$$

$$a_4 = \sin(2\pi - x) = -sinx$$

כדי לקבל את הסכום $sinx + cosx$ על מספר איברי הסדרה בחלוקה בארבע לקבל שארית 2. התשובה הנכונה לכן היא ג. 42

שאלה 14

a, b, c שלושה איברים עוקבים שונים בסדרה חשבונית. אם נשנה את סדר האיברים ל- a, c, b נקבל סדרה הנדסית. חשב את מנת הסדרה ההנדסית.

a, c, b אברי הסדרה ההנדסית שמנתה q.

אברי הסדרה ההנדסית הם a, aq, aq^2

a , $c = aq$, $b = aq^2$

שלושת האברים השונים בסדרה החשבונית מקיימים $a + c = 2b$

נציב $c = aq$, $b = aq^2$

$$a + aq = 2aq^2 \quad \rightarrow \quad 2q^2 - q - 1 = 0 \quad \rightarrow q_1 = 1 \quad , q_2 = -\frac{1}{2}$$

הפתרון $q_1 = 1$ אינו מתאים. אם שלושת האיברים בסדרה החשבונית שונים זה מזה, הרי שגם בסדרה ההנדסית הם שונים. אם $q = 1$ בסדרה הנדסית איבריה יהיו זהים.

לכן $q = -\frac{1}{2}$.

שאלה 15

בסדרה חשבונית עולה $2n+1$ איברים וידוע כי $a_{n+1}=0$

נסמן:

A סכום n האיברים הראשונים בסדרה ו - B סכום n האיברים האחרונים בסדרה.

מצא את $|A|-|B|$

בסדרה האיבר האמצעי שווה 0.

סכום כל שני איברים סימטריים גם הוא 0.

$a_1+a_{2n+1}=0$, $a_2+a_{2n}=0$, $a_k+a_{2n+1-(k-1)}=0$.........

$\rightarrow \quad a_1+a_2 \ldots\ldots a_n=-(a_{n+2+}a_{n+3} \ldots\ldots + a_{2n+1})$

לכן $|A|=|B|$ ומכאן $|A|-|B|=0$

שאלה 16

בסדרה חשבונית עולה $2n+1$ איברים וידוע כי $a_{\mathrm{n+1}} = 5$

נסמן:

A סכום n האיברים הראשונים בסדרה ו - B סכום n האיברים האחרונים בסדרה.

נתון: $A+B=990$

מצא את n.

$$\frac{a_1+a_{2\mathrm{n}+1}}{2} = 5 \quad , \quad \frac{a_2+a_{2\mathrm{n}}}{2} = 5 \quad , \quad \frac{a_k+a_{2\mathrm{n}+1-(\mathrm{k}-1)}}{2} = 5 \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_1+a_{2\mathrm{n}+1}}{2} + \frac{a_2+a_{2\mathrm{n}}}{2} + \cdots \frac{a_{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{n}+2}}{2} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$$

$$5n = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} \quad \rightarrow \quad 5n = \frac{990}{2} \quad \rightarrow 10\mathrm{n} = 990 \quad \rightarrow \mathrm{n} = 99$$

שאלה 17

בסדרה חשבונית עולה יש $2n+1$ איברים וידוע כי $a_{n+1}=0$

נסמן:

A סכום n האיברים הראשונים בסדרה ו - B סכום n האיברים האחרונים בסדרה.

בחר את הטענות הנכונות ונמק.

א. $\frac{A}{B}=1$ לא נכון, הסדרה עולה, האיבר האמצעי 0 ולכן היחס יהיה שלילי.

ב. $\frac{A}{B}=-1$ נכון.

בסדרה האיבר האמצעי שווה 0 . סכום כל שני איברים סימטריים גם הוא 0.

$a_1+a_{2n+1}=0$, $a_2+a_{2n}=0$, $a_k+a_{2n+1-(k-1)}=0$.........

$\leftarrow$ $a_1+a_2 \ldots\ldots a_n=-(a_{n+2+}a_{n+3}\ldots\ldots+a_{2n+1})$

לכן $A=-B$ והיחס ביניהם -1.

ג. $2A=S_{2n+1}$ לא נכון, הסדרה עולה, האיבר האמצעי שווה 0 ולכן $A<0$.

ד. $S_{2n+1}>A$ נכון. סכום אברי הסדרה הוא 0, סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא שלילי.

שאלה 18

סכום אברי הסדרה שאיברה הכללי $a_n = \cos(\frac{n\pi}{2} - x)$ הוא $sinx - cosx$.

בחר את התשובה הנכונה ונמק.

מספר האיברים בסדרה הוא:

א.32 ב. 48 ג. 52 ד. 62

בסדרה קיימת מחזוריות. סכום כל ארבעה איברים עוקבים הוא אפס.

$$a_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = sinx$$

$$a_2 = \cos(\pi - x) = -cosx$$

$$a_3 = \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -sinx$$

$$a_4 = \cos(2\pi - x) = cosx$$

כדי לקבל את הסכום $sinx - cosx$ על מספר איברי הסדרה בחלוקה בארבע לקבל שארית 2. התשובה הנכונה לכן היא: ד. 62

שאלה 19

סכום אברי הסדרה שאיברה הכללי $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2} - x)$ הוא 0.

בחר את התשובה הנכונה ונמק.

מספר האיברים בסדרה הוא: א. 37 ב. 43 ג. 40 ד. 45

בסדרה קיימת מחזוריות. סכום כל ארבעה איברים עוקבים הוא אפס.

$$a_1 = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = cosx$$

$$a_2 = \sin(\pi - x) = sinx$$

$$a_3 = \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -cosx$$

$$a_4 = \sin(2\pi - x) = -sinx$$

כדי לקבל את הסכום אפס על מספר איברי הסדרה להתחלק בארבע. התשובה הנכונה לכן היא ג. 40

הסתברות

שאלה 1

מטילים קוביית משחק הוגנת שלוש פעמים. לפניך שתי טענות. קבע עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא ונמק קביעתך.

1) ההסתברות לקבלת המספר 6 בדיוק פעמיים, קטנה מההסתברות לקבל בדיוק פעם אחת 3 ובדיוק פעם אחת 4.

נכון.

ההסתברות לקבל פעמיים 6 יכולה להתקבל מאחד משלושת המקרים הבאים:

א- 6 בזריקה ראשונה, 6 בזריקה שניה, מספר אחר בזריקה שלישית.

ב- 6 בזריקה ראשונה, 6 בזריקה שלישית, מספר אחר בזריקה שניה.

ג- 6 בזריקה שניה, 6 בזריקה שלישית, מספר אחר בזריקה ראשונה.

בכל אחד מהמקרים ההסתברות לקבל 6 בזריקה בודדת היא: $\frac{1}{6}$

ההסתברות לקבל אחד מחמשת המספרים השונים מ-6 בזריקה בודדת היא: $\frac{5}{6}$

לכן ההסתברות לכל אחד מהמקרים היא:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$

שלושת המקרים זרים זה לזה, לכן יש לחבר את ההסתברויות שלהם, או, במקרה שלנו לכפול את התוצאה ב-3:

$$P(A) = \frac{15}{216}$$

באופן דומה, ההסתברות לקבל 3 בזריקה בודדת היא: $\frac{1}{6}$, ההסתברות לקבל 4 בזריקה בודדת היא: $\frac{1}{6}$, ההסתברות לקבל מספר שאינו 3 ואינו 4 בזריקה בודדת היא: $\frac{4}{6}$.

כאן יש שישה מקרים!

קל לראות זאת כך: יש 3 אפשרויות למספר השונה מ-3 ו-4, ובכל אפשרות כזו 3 או 4 יכולים להתחלף ביניהם בשתי הזריקות הנותרות.

לכן ההסברות לקבל 3 בזריקה אחת, 4 בזריקה אחרת, ומספר שונה מהם בזריקה שלישית היא:

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{24}{216}$$

$\frac{15}{216} < \frac{24}{216}$ לכן הטענה נכונה.

2) הסיכוי שבהטלה הראשונה ובשלישית יתקבל 2 אם ידוע שבהטלה השנייה התקבל 2, גדול מהסיכוי לקבל 2 לפחות פעמיים.

הטענה אינה נכונה.

המאורעות המתארים את התוצאה בכל זריקה בודדת בלתי תלויים לכן ההסתברות לקבל 2 בהטלה ראשונה שווה להסתברות לקבל 2 בהטלה שלישית וההסתברות לקבל 2 בשתיהן גם יחד היא מכפלת ההסתברויות: 1/36.

ההסתברות לקבל 2 לפחות פעמיים שווה לסכום ההסתברויות:

הסתברות לקבל 2 בדיוק פעמיים ($\frac{15}{216}$ מסעיף קודם)

+

ההסתברות לקבל 2 בדיוק 3 פעמים $\frac{1}{216}$

ובסיכום:

$$\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=\frac{16}{216}>\frac{1}{36}$$

שאלה 2

לפניך טבלת הסתברות דו-ממדית, ובה תאים ריקים.

	A	$\bar{A}$	סה"כ
B	0.32	0.48	0.8
$\bar{B}$	0.08	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.12$	0.2
סה"כ	$p(A) = 0.4$	0.6	1

מלא את התאים הריקים באופן שיתאר קשר בין שני מאורעות בלתי תלויים זה בזה.
פרט שיקוליך.

בשלב הראשון נסיק: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.6$

כיוון שהמאורעות בלתי תלויים מתקיים: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$ ומכאן $P(\bar{B}) = 0.2$

מכאן אפשר להשלים בקלות את כל התאים הריקים האחרים.

דרך אחרת, מעט יותר ארוכה אך מתחברת למהות של מאורעות בלתי תלויים:

כיוון שהמאורעות בלתי תלויים, התרחשותו (או אי התרחשותו) של המאורע $\bar{A}$ אינה משפיעה על ההסתברות של המאורע B, כלומר $P(\bar{B}/\bar{A}) = P(\bar{B} \cap A)$

במילים אחרות:

$$\frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$$

$$\frac{0.12}{0.6} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{0.4}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.08$$

שאלה 3

בכד 5 כדורים אדומים ו- 3 כדורים לבנים.

א. מוציאים מהכד שני כדורים עם החזרה. (מוציאים כדור אחד, מחזירים אותו ומוציאים כדור שני).
מה ההסתברות שבהוצאה השנייה יצא כדור אדום אם ידוע שבהוצאה הראשונה הוצא כדור אדום?
כיוון שהמאורעות בלתי תלויים אין לתוצאת ההטלה הראשונה השפעה על ההסתברות. ההסתברות היא $\frac{5}{8}$

ב. מוציאים מהכד שני כדורים ללא החזרה. (מוציאים כדור אחד, מניחים מחוץ לכד ומוציאים כדור שני).
מה ההסתברות שבהוצאה השנייה יצא כדור אדום אם ידוע שבהוצאה הראשונה הוצא כדור אדום?
המאורעות תלויים, באמצעות דיאגרמת עץ ניתן להראות שההסתברות להוצאת כדור אדום בזריקה השנייה אם ידוע שבזריקה הראשונה הוצא כדור אדום היא

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$$

שאלה 4

נתון: $P(A)=\binom{6}{4}(0.2)^4(0.8)^2$

חבר שאלה שזו דרך הפתרון שלה.

דוגמה: בחברה בינלאומית גדולה 20% מהעובדים הם בעלי תואר ראשון ו- 80% מהעובדים ללא תואר. בוחרים באקראי 6 עובדים.

מה ההסתברות שארבעה יהיו ללא תואר ושניים בעלי תואר ראשון?