

דוגמאות לשאלות דמויות בגרות

שאלון 035582

פעילות לתלמידים

לכיתה י"ב – 5 יח"ל



משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים



אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך



מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية



מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

שאלות לתרגול שאלון 582, י"ב 5 יחידות

1. גיאומטריה אנליטית

- נתון המקום הגיאומטרי של הנקודות המקיימות את המשוואה: $x(6 - x) = y(y + 8)$.
- א. אפיין את המקום הגיאומטרי הנתון. (קבע את סוגו: ישר, מעגל, אליפסה, פרבולה).
- ב. מזיזים את המקום הגיאומטרי הנתון בסעיף א' שלוש (3) יחידות שמאלה וארבע (4) יחידות מעלה. לאחר מכן: בכל נקודה על המקום הגיאומטרי: מגדילים את שיעור ה- x פי $\frac{4}{3}$.
- הראה שהמקום הגיאומטרי שמתקבל באופן זה הוא אליפסה ומצא את משוואתו.
- ג. הנקודה D נמצאת על האליפסה שאת משוואתה מצאת בסעיף ב. הנקודות F ו- G הם מוקדי האליפסה. מהו היקפו של המשולש DFG ? מהו שטחו המקסימלי? הסבר תשובתך. בטא תשובתך באמצעות שרשים, או דייק עד לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
- ד. האליפסה שאת משוואתה מצאת בסעיף ב זהה למקום הגיאומטרי של המספרים המרוכבים z המקיימים את הקשר הבא: $|z - n| + |z - m| = \frac{40}{3}$, (m, n) מספרים ממשיים.
- מהם הערכים של n ו- m ?

2. גיאומטריה אנליטית

א. מצא משוואת פרבולה קנונית, אשר המוקד שלה נמצא על האליפסה $x^2 + 4y^2 = 36$.

פרט שיקוליו.

ב. הנקודה P נמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת בסעיף א'. OP הוא מיתר בפרבולה. (O ראשית הצירים).

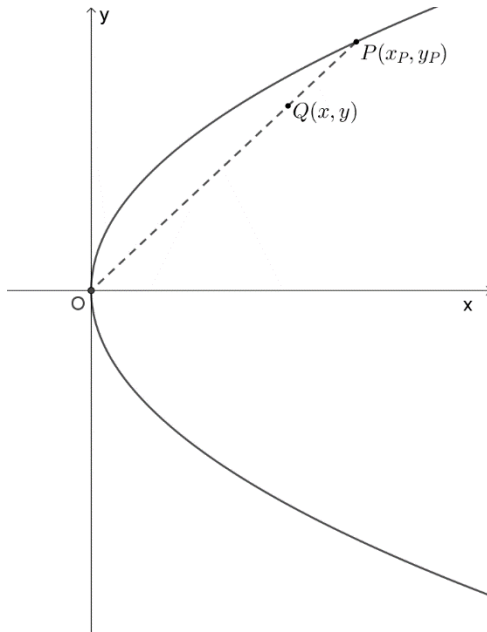
הנקודה Q נמצאת על המיתר OP כך ש-: $\frac{PQ}{QO} = \frac{1}{m}$, $m > 1$.

הראה שהמקום הגיאומטרי של הנקודות Q המתקבלות באופן זה הוא פרבולה והבע את משוואתה באמצעות m .

ג. ידוע כי המרחק בין המוקד הימני של האליפסה לבין

המוקד של הפרבולה החדשה הוא: $4.5 - 3\sqrt{3}$.

מצא את ערכו של m אם ידוע $1 < m < 6$.



3. מספרים מרוכבים

z_1, z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים **שונים** הנמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון, ו- z_3 נמצא ברביע השלישי.

נסמן: $|z_3| = r_3, |z_2| = r_2, z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

א. הבע את המנה $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ באמצעות r_3, r_2, r_1 (הערכים המוחלטים של z_2, z_1 ו- z_3).

ב. z_1 ו- z_3 הם שניים מהמספרים מסעיף א. לפניכם שלוש משוואות:

$$(1) \quad (z_1)^7 = (z_3)^7 = -128$$

$$(2) \quad (z_1)^4 = (z_3)^4 = 64$$

$$(3) \quad (z_1)^8 = (z_3)^8 = -8 - 8i\sqrt{3}$$

רק אחת מהמשוואות יכולה להתאים לתכונות של z_1 ו- z_3 .

איזוהי המשוואה המתאימה? נמקו.

4. מספרים מרוכבים בשילוב טריגונומטריה במרחב

בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = i$, $a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

א. (1) מצא את מכפלת 15 האיברים הראשונים בסדרה.

(2) מצא את הערך של n המספר הטבעי הקטן ביותר, שעבורו: $a_n = a_1$.

ב. המשולש ABC הוא בסיסה של פירמידה משולשת $ABCD$ ישרה שגובהה 2.

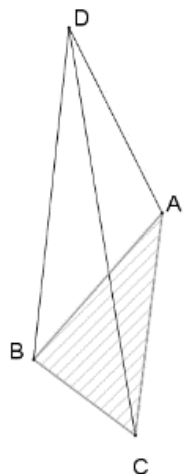
קדקודי הבסיס C, B, A מיוצגים על ידי המספרים a_1, a_2, a_3 בהתאמה.

מצא את:

(1) נפח הפירמידה.

(2) הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס ABC .

(3) הזווית בין הפאה הצדדית ADC לבין פאת הבסיס ABC ?



5. וקטורים

נתונים הישר: $l_1: \underline{x} = (5, 8, -12) + t(1, 2, -3)$ והמישור: $\pi_1: 2x + 3y + 4z - 12 = 0$
הנקודות B ו- C הן נקודות החיתוך של המישור π_1 עם ציר ה- y וציר ה- z בהתאמה.

הישר: l_2 עובר דרך B ו- C .

א. מצא את l_2 .

ב. מצא את המצב ההדדי בין l_1 ו- l_2 .

$$l_1: \underline{x} = (5, 8, -12) + t(1, 2, -3)$$

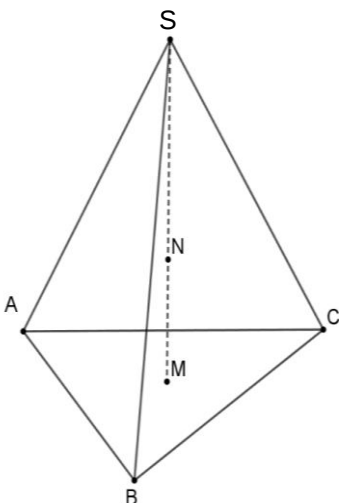
ג. המישור π_2 עובר דרך הנקודה $A(1, 0, 0)$ ודרך הישר l_2 (הישר נמצא על המישור). מצא את

משוואת המישור: π_2 .

ד. האם נכונה הטענה הבאה: הישר: $l_3: \underline{x} = (12, 3, 4) + t(12, 3, 4)$ מאונך ל- π_2 ועובר בראשית

הצירים. נמק קביעתך.

6. וקטורים



נתונה **פירמידה ישרה** $SABC$ שבסיסה ABC הוא משולש שווה צלעות.

נסמן: $\vec{SA} = \underline{u}$, $\vec{SB} = \underline{v}$, $\vec{SC} = \underline{w}$.

N היא נקודה בתוך הפירמידה כך ש- $\vec{SN} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{w}$.

M היא נקודה במישור ABC כך ש- $SM \perp ABC$.

- הוכח כי הנקודות S , M ו- N נמצאות על ישר אחד.
-

(1) הוכח כי: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w}$.

(2) הוכח: $\vec{SC} \perp \vec{AB}$, $\vec{SA} \perp \vec{BC}$.

ג. נתון גם:

$$\underline{u} = (-4\sqrt{3}, 4, -8), \quad \underline{v} = (0, -8, -8), \quad \underline{w} = (4\sqrt{3}, 4, -8)$$

$$C(4\sqrt{3}, 4, 0)$$

מצא את הנקודות: S , A , B , M .

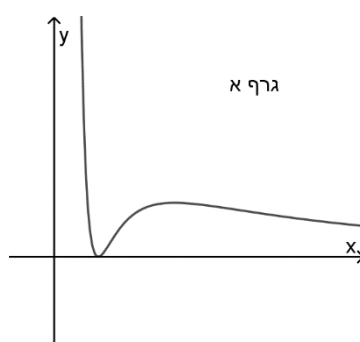
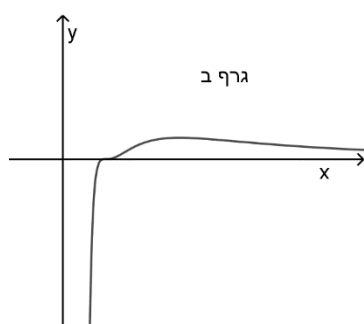
חשב את נפח הפירמידה $SABC$.

ד. מצא את משוואת המישור ABS .

7. אנליזה

נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = \frac{(\ln(x))^n}{x}$, n מספר טבעי גדול מ-1.

- רשום את תחום ההגדרה של הפונקציות במשפחה, את נקודת החיתוך שלהן עם ציר ה- x ואת האסימפטוטה האנכית שלהן.
- עבור אילו ערכים של n יש לפונקציות במשפחה שתי נקודות קיצון ועבור אילו ערכים יש נקודת קיצון אחת בלבד? נמק קביעתך.
- לפניך שני גרפים ששייכים לפונקציות מהמשפחה. קבע עבור כל אחד מהם האם הוא מתאים ל- n זוגי או אי-זוגי. נמק קביעתך.



ד. נתונות הפונקציות: $l(x) = \frac{(\ln(\frac{1}{x}))^3}{x}$, $k(x) = \frac{(\ln(\frac{1}{x}))^2}{x}$.

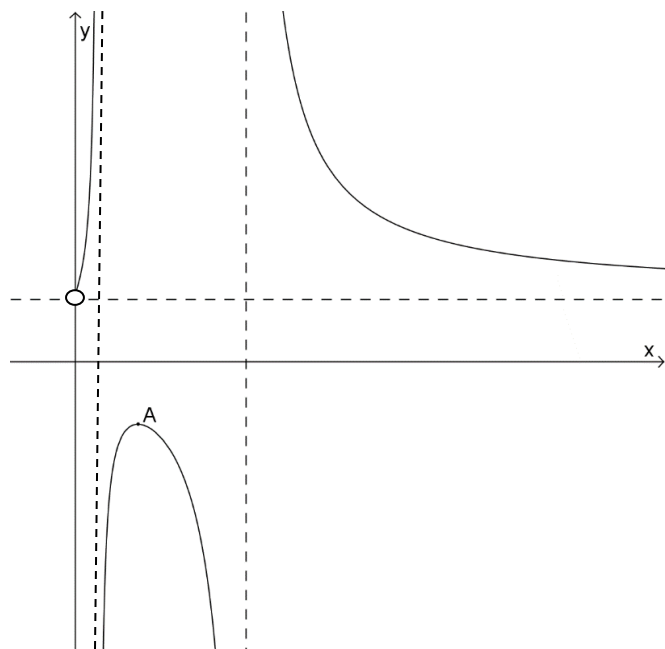
היעזר בגרפים של סעיף ג וסרטט גרפים עבור $k(x)$, $l(x)$.

ה. חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות:

$$h(x) = \frac{(\ln(x-1))^3}{(x-1)} \text{ ו- } g(x) = \frac{(\ln(x-1))^2}{(x-1)}$$

8. אנליזה

א. בצויר שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a^2}{\ln^2 x - a^2}$.



מצא את:

- (1) המשוואות של האסימפטוטות המקבילות לצירים. בטא באמצעות a במידת הצורך.
- (2) שיעורי הנקודה A , שהיא נקודת המקסימום של הפונקציה.

ב. העתק למחברתך את הגרף של $f(x)$

והוסף לסרטוט גם את הגרפים של:

$$g(x) = \frac{\ln^2 x - a^2}{\ln^2 x + a^2} \text{ ושל:}$$

$$(g(x))^2 = \left(\frac{\ln^2 x - a^2}{\ln^2 x + a^2} \right)^2$$

שים לב: אין צורך בחקירה מלאה, אלא בנימוק מושכל שמסביר את הסרטוט.

הקפד לציין את מיקומן של נקודות הקיצון, נקודות החיתוך עם הצירים ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים של כל אחת מהפונקציות.

ג. מצא את ערכו של a , אם נתון ששטחו של המלבן שיוצרות האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x)$ עם הצירים הוא: e יחידות שטח.

9. אנליזה

נתונות הפונקציות: $g(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x}$, $f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

א. עבור כל אחת מהפונקציות:

(1) רשום את תחום ההגדרה,

(2) מצא את תחומי העליה והירידה ואת נקודות הקיצון.

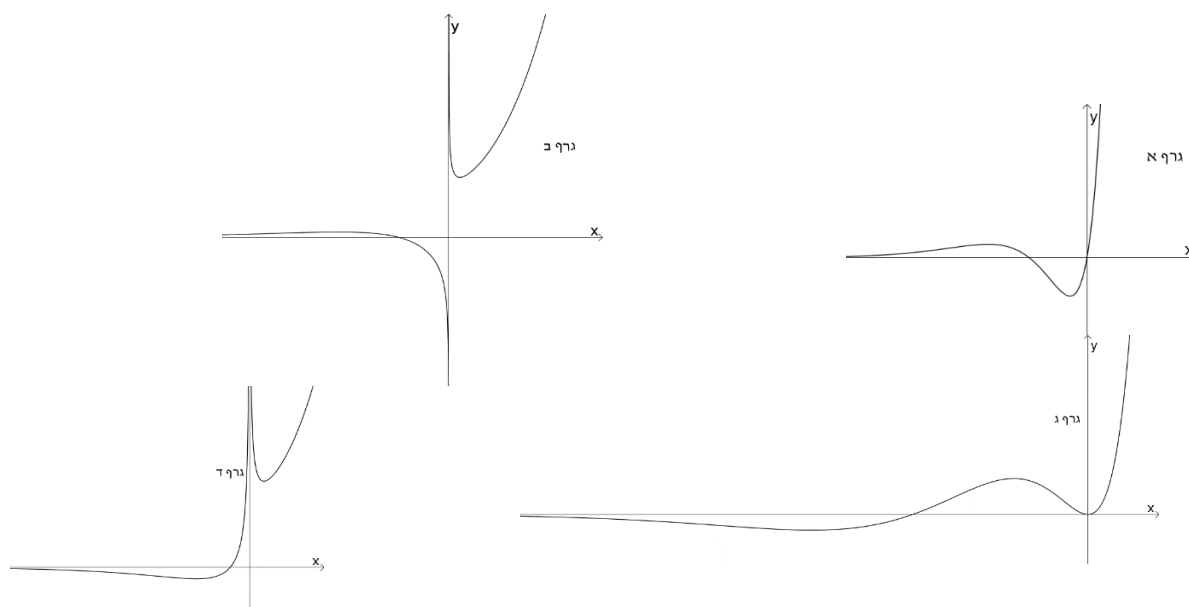
ב. הסבר מדוע לכל אחת מהפונקציות קיימת אסימפטוטה אופקית.

ג. ידוע כי לשתי הפונקציות אסימפטוטה אופקית: $y = 0$.

סרטט סקיצה מתאימה לכל אחת מהפונקציות.

ד. לפניך ארבעה גרפים. בחר ביניהם את הגרף המתאים ל- $f'(x)$ ואת הגרף המתאים

ל- $g'(x)$. נמק בחירתך היטב.



ה. היעזר בגרפים שבחרת ובחקירה שביצעת וקבע

מהן האסימפטוטות האפקיות לגרף הפונקציה: $h(x) = \frac{1}{e^{f(x)}}$?

10. גדילה ודעיכה בשילוב אנליזה

בשני כלים שונים יש תרבויות חיידקים. בכלי א' מתרבים החיידקים באופן בו היחס בין מספר החיידקים ברגע מסוים גדול פי a ממספרם שעה שלמה קודם לכן. בכלי ב' מתרבים החיידקים לפי הקשר הבא: $g(x) = g(0) \cdot b^x$, מייצג את הזמן בשעות שלמות. במדידה ראשונה ביום מסוים העריכו את מספר החיידקים בתרבות בכלי א' כ- K ואת מספר החיידקים בכלי ב' כ- $5K$.

במדידה שנייה באותו היום, שנערכה לאחר 3 שעות, היו בכלי א' L חיידקים ובתרבות בכלי ב' $\frac{5}{8}L$ חיידקים.

א. חשב כמה שעות מאז המדידה הראשונה היה מספר זהה של חיידקים בשתי התרבויות.

ב. בטא באמצעות K ו- b את:

(1) הפונקציה $f(x)$ המתארת את מספר החיידקים בכלי א', ו-

(2) את הפונקציה $g(x)$ המתארת את מספר החיידקים בכלי ב', לפי הזמן x שנמדד מרגע המדידה הראשונה.

ג. סרטט במערכת צירים את הפונקציה: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. חשב את השטח המגבל בין גרף

הפונקציה לבין ציר ה- x לבין הישרים: $x = 1$, ו- $x = 3$.